

5.4. Análisis Cinemático mediante el MER.

En esta sección se desarrollan las ecuaciones que definen la posición, velocidad y aceleración de un sistema mecánico en el plano, y se discuten aspectos relacionados con su utilización. Se utilizan mecanismos elementales para ilustrar la formulación y solución de dichas ecuaciones.

Se indica que las restricciones cinemáticas que se estudiaron en las secciones previas, junto con las restricciones de conducción, proporcionan los fundamentos analíticos para el análisis de la posición, velocidad y aceleración de los sistemas mecánicos planos. En esta sección se presenta la forma de las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración, y se indica el procedimiento computacional para resolverlas.

Respecto al *análisis de posición*, las restricciones cinemáticas formuladas, proporcionan la definición geométrica del movimiento que puede tener el mecanismo. Se indica la forma matricial de ensamblarlas. A continuación, respecto a las restricciones de conducción, se indica como ensamblarlas, que son dependientes del tiempo, y que representan los orígenes del movimiento que posee el sistema. Se suponen que el número de restricciones de conducción será igual al número de grados de libertad del sistema físico. Se indica que tanto las restricciones cinemáticas, como las de conducción, han de ensamblarse en forma matricial. Se recuerda que el objetivo del análisis de posición es resolver esas ecuaciones, obteniendo el vector de coordenadas generalizadas del sistema en función del tiempo. Se indica que al ser estas ecuaciones no lineales, encontrar una solución analítica es generalmente imposible, y que es fácil formular un conjunto de restricciones cinemáticas y de conducción para el sistema que no se pueda satisfacer físicamente, con lo que el sistema no tendrá solución desde un punto de vista matemático. Por lo tanto, un análisis de posición debe considerar seriamente cuestiones tales como la existencia de soluciones, así como los métodos numéricos que deben emplearse para resolver las ecuaciones. Se insiste en que es sorprendentemente sencillo inadvertidamente incluir restricciones redundantes en un modelo, especialmente para los sistemas espaciales, por lo que es necesario disponer de métodos computacionales para comprobar que con las restricciones consideradas el sistema se puede ensamblar, es decir, para asegurar que las restricciones son consistentes. Una forma de comprobar este extremo consiste en calcular el rango del Jacobiano de las restricciones, si este coincide con el número de ecuaciones de restricción, el sistema será consistente y no existirán restricciones en exceso.

Se insiste en que el *Jacobiano* resulta ser un elemento fundamental en la resolución de la resolución de las ecuaciones de posición y en la determinación de las configuraciones singulares. Se indica que el método más comúnmente utilizado en la resolución de las ecuaciones no lineales de posición, sigue siendo el *Método de Newton-Raphson*. Se recuerda que se trata de una técnica iterativa que comienza con una estimación de la configuración del sistema, y para cada iteración se resuelve un sistema de ecuaciones lineal, que proporciona una estimación mejorada de la configuración del sistema, y que este proceso iterativo continua hasta que se alcanza la precisión deseada. Por otra parte se indica que el método de Newton-Raphson posee la atractiva propiedad que es convergente cuadráticamente; es decir, el error en la solución en una determinada iteración es proporcional al cuadrado del error en la iteración precedente. Sin embargo, el método puede diverger si se ha proporcionado una mala estimación inicial de la posición de todos los cuerpos del sistema, o si no existe solución de las ecuaciones cinemáticas. Se insiste en que si el método de Newton-Raphson no converge, se puede interpretar como que el mecanismo especificado no puede ensamblarse físicamente. Sin embargo, ya que el método puede también diverger debido a una mala estimación inicial, se necesita disponer de algún otro método robusto para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, que permita asegurar sin lugar a dudas que el mecanismo especificado no puede ensamblarse. Una de esas técnicas consiste en buscar un vector de coordenadas generalizadas en el instante inicial que minimice el error en el cumplimiento de las ecuaciones de restricción y que este tan cerca como sea posible de la estimación inicial dada. Esta técnica se utiliza en el programa *Mechanica*, proporcionando una valiosa herramienta para el *ensamblado* de un mecanismo, o para descubrir que un determinado diseño no puede ser ensamblado.

Con respecto al *análisis de velocidad*, se indica que suponiendo que la matriz Jacobiana es no singular y que numéricamente se ha obtenido una solución de las ecuaciones de

restricción cinemáticas, matemáticamente es posible asegurar (mediante el teorema de la función implícita) que van a existir soluciones para la velocidad y la aceleración del sistema. Se indica que la *ecuación de velocidad* se obtiene derivando ambos miembros de la ecuación de posición respecto al tiempo, y que es costumbre reordenarla de forma que en el primer miembro quede el producto de la matriz Jacobiana por el vector de coordenadas generalizadas. Con lo que el segundo miembro de la ecuación de velocidad se puede ensamblar utilizando los segundos miembros de las ecuaciones de velocidad para las restricciones cinemáticas y de conducción que existen en el sistema. Por último, con el fin de poner en práctica todos estos conceptos, se proporciona un ejemplo de un mecanismo sencillo

De la misma forma que las ecuaciones de velocidad se obtuvieron diferenciando las ecuaciones cinemáticas, para obtener la *ecuación de aceleración* es necesario derivar con respecto al tiempo ambos miembros de la ecuación de velocidad. De nuevo el segundo miembro de esta ecuación puede ensamblarse utilizando los segundos miembros de las ecuaciones de aceleración para las restricciones. De nuevo el Jacobiano de las restricciones juega un papel fundamental en el análisis de aceleración.

Con el fin de aprender a manejar los conceptos presentados en esta sección, se realiza la formulación y resolución completa de un análisis cinemático sobre tres ejemplos. Estos ejemplos son: el *péndulo simple*, el *mecanismo deslizadera-manivela*, y el *mecanismo cuadrilátero articulado*

5.4.1. ANALISIS de POSICION.

(1) COORDENADAS GENERALIZADAS

El vector de *coordenadas generalizadas cartesianas* correspondiente al cuerpo i en un sistema de cuerpos rígidos, es:

$$\mathbf{q}_i = [\mathbf{r}_i, \phi_i]^T$$

donde $\mathbf{r}_i = [x, y]^T$ representa las coordenadas globales o el vector de posición del origen del sistema de referencia $x'_i - y'_i$ fijo con el cuerpo; y ϕ_i representa el ángulo que forma este sistema de referencia con el sistema de referencia global $x - y$.

El conjunto compuesto de coordenadas generalizadas para el sistema completo es:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \dots, \mathbf{q}_{nb}^T]^T$$

donde nb es el número de cuerpos móviles en el sistema.

(2) RESTRICCIONES

Las *restricciones cinemáticas* formuladas en secciones anteriores proporcionan la definición geométrica del movimiento permitido de un sistema. Para un sistema en particular, esas restricciones se pueden escribir en forma matricial como:

$$\Phi^K(\mathbf{q}) = [\Phi_1^K(\mathbf{q}), \dots, \Phi_{nh}^K(\mathbf{q})]^T = \mathbf{0} \quad \text{Ec. 3.6.1}$$

donde \mathbf{q} representa al vector de las nc coordenadas generalizadas definidas en el sistema, y nh es el número de ecuaciones de restricción holonómicas.

Además de las restricciones cinemáticas, las *restricciones de conducción* se pueden ensamblar en forma matricial resultando:

$$\Phi^D(\mathbf{q}, t) = [\Phi_1^D(\mathbf{q}, t), \dots, \Phi_{DOF}^D(\mathbf{q}, t)]^T = \mathbf{0} \quad \text{Ec. 3.6.2}$$

Estas ecuaciones dependen del tiempo y son las que representan el movimiento a que está sometido el sistema. Se supone que el número de restricciones de conducción que aparecen en la Ec. 3.6.2 es igual al número de grados de libertad del sistema físico, y que $n_h + \text{DOF} = n_c$. En este caso, las Ecs. 3.6.1 y 3.6.2 formarán un sistema de n_c ecuaciones con n_c incógnitas.

Ensamblando las restricciones cinemáticas y las de conducción en forma matricial, el sistema de ecuaciones de restricción completo es:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \Phi^K(\mathbf{q}) \\ \Phi^D(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix}_{n_c \times 1} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. 3.6.3}$$

El objetivo del *análisis de posición* es resolver este sistema de ecuaciones con el fin de obtener el vector \mathbf{q} como función del tiempo. Al ser estas ecuaciones no lineales, encontrar una solución analítica es generalmente imposible. Además, es fácil formular un conjunto de restricciones cinemáticas y de conducción para el sistema que no se puede satisfacer físicamente, con lo que el sistema no tendrá solución desde un punto de vista matemático. Un análisis de posición debe considerar seriamente cuestiones tales como la existencia de soluciones para la Ec. 3.6.3, así como los métodos numéricos que deben emplearse para resolverla cuando existen soluciones

(3) JACOBIANO DE LAS RESTRICCIONES

El Jacobiano resulta ser un elemento fundamental en la resolución de la Ec. 3.6.3 y en la determinación de las configuraciones singulares:

$$\Phi_q(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \end{bmatrix}_{n_c \times n_c} \quad \text{Ec. 3.6.4}$$

A pesar que el Teorema de la Función Implícita proporciona condiciones concretas bajo las cuales va a existir una solución de las ecuaciones cinemáticas, sin embargo, no proporciona un método para construir analíticamente dicha solución. La condición de que el Jacobiano de la Ec. 3.6.4 sea no singular como condición suficiente para la existencia de una solución de las ecuaciones cinemáticas, se puede utilizar para comprobar el acercamiento a configuraciones singulares asociadas con bloqueos en un mecanismo, hecho que se puede interpretar matemáticamente como pérdida de la existencia física de una solución.

Además de ser una herramienta teórica muy valiosa, el Jacobiano de las restricciones, Ec. 3.6.4, juega un papel fundamental en la solución numérica de las ecuaciones cinemáticas. El método más comúnmente utilizado en la resolución de ecuaciones no lineales de la forma de las Ecs. 3.6.3, es *el Método de Newton-Raphson*. El método de Newton-Raphson es una técnica iterativa que comienza con una estimación $\mathbf{q}^{(0)}$ de una configuración que satisfaga la Ec. 3.6.3 en el tiempo t . Para la iteración genérica k , se resuelve la siguiente ecuación para obtener una corrección $\Delta \mathbf{q}^{(k)}$:

$$\Phi_q(\mathbf{q}^{(k)}, t) \Delta \mathbf{q}^{(k)} = -\Phi_q(\mathbf{q}^{(k)}, t) \quad \text{Ec. 3.6.7}$$

que seguidamente se suma a la estimación $\mathbf{q}^{(k)}$ para obtener una estimación mejorada; es decir,

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta \mathbf{q}^{(k)}, \quad k=0, 1, \dots \quad \text{Ec. 3.6.8}$$

El proceso iterativo continúa hasta que se alcanza la precisión deseada.

El método de Newton-Raphson posee la atractiva propiedad que es convergente cuadráticamente; es decir, el error en la solución en una determinada iteración es proporcional al cuadrado del error en la iteración precedente. Sin embargo, el método

puede diverger si se ha proporcionado una mala estimación inicial de la posición de todos los cuerpos del sistema, o si no existe solución de las ecuaciones cinemáticas. Existe una relación muy estrecha entre el teorema de la función implícita, que indica la necesidad de que el Jacobiano sea no singular, y el requerimiento que el Jacobiano sea no singular al resolver las ecuaciones de Newton-Raphson, Ecs. 3.6.7.

Si el método de Newton-Raphson no converge, se puede interpretar como que el mecanismo especificado no puede ensamblarse físicamente. Sin embargo, ya que el método puede también diverger debido a una mala estimación inicial, se necesita disponer de algún otro método robusto para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, que permita asegurar sin lugar a dudas que el mecanismo especificado no puede ensamblarse. Una de esas técnicas consiste en buscar un vector \mathbf{q} de coordenadas generalizadas en el instante t_0 que minimice el error en el cumplimiento de las ecuaciones de restricción y que este tan cerca como sea posible de la estimación inicial dada $\mathbf{q}(\theta)$. Una de estas técnicas consiste en minimizar sucesivamente:

$$\Psi_0(\mathbf{q}, t_0, r) \equiv (\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(0)})^T (\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(0)}) + r \Phi^T(\mathbf{q}, t_0) \Phi(\mathbf{q}, t_0) \quad \text{Ec. 3.6.9}$$

incrementando los valores del parámetro $r > 0$ de forma que se vayan cumpliendo las ecuaciones de restricción cada vez con más exactitud. Esta técnica de minimización proporciona un valiosa herramienta para el *ensamblado* de un mecanismo, o para descubrir que un determinado diseño no puede ser ensamblado. Si este método de optimización converge a medida que el valor de r se va incrementando, a un valor de \mathbf{q} para el que la Ec. 3.6.3 no se cumple, el ingeniero debe darse cuenta que el mecanismo no puede ensamblarse.

5.4.2. ANALISIS de VELOCIDAD

Suponiendo que la matriz Jacobiana, Ec. 3.6.4, es no singular y que numéricamente se ha obtenido una solución de las ecuaciones de restricción cinemáticas, el teorema de la función implícita garantiza que van a existir soluciones para la velocidad y la aceleración del sistema. El desafío consiste en calcular esas cantidades numéricamente.

Ya que la Ec. 3.6.3 se ha de verificar para todo instante de tiempo, si se diferencian ambos miembros con respecto al tiempo y se reordena el resultado, se obtienen la *ecuación de velocidad*:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = -\Phi_{\mathbf{t}} \equiv \mathbf{v} \quad \text{Ec. 3.6.10}$$

Ya que el Jacobiano de las restricciones es no singular, esta ecuación permite determinar de forma unívoca la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$. Este cálculo computacional es eficiente, así como directo, ya que el Jacobiano ya ha sido construido y factorizado cuando se resolvieron las ecuaciones de posición utilizando el método de Newton-Raphson, Ec. 3.6.7.

El segundo miembro \mathbf{v} de la ecuación de velocidad, Ec. 3.6.10, se puede ensamblar utilizando los segundos miembros de las ecuaciones de velocidad para restricción cinemática y de conducción que existe en el sistema, y que se desarrollaron en las secciones correspondientes del tema anterior.

5.4.3. ANALISIS de ACELERACION

De la misma forma que las ecuaciones de velocidad, Ec. 3.6.10, se obtuvieron diferenciando las ecuaciones cinemáticas, Ec. 3.6.3, para obtener las *ecuaciones de aceleración* es necesario diferenciar ambos miembros de la Ec. 3.6.10, con lo que se obtiene:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = -(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{\mathbf{qt}} \dot{\mathbf{q}} - \Phi_{\mathbf{tt}} \equiv \boldsymbol{\gamma} \quad \text{Ec. 3.6.11}$$

Estas ecuaciones permiten obtener la aceleración $\ddot{\mathbf{q}}$. De nuevo el segundo miembro de la ecuación de aceleración, Ec. 3.6.11, debe ensamblarse utilizando los segundos miembros de las ecuaciones de aceleración para las restricciones que se desarrollaron en las secciones correspondientes del tema anterior.

Téngase en cuenta, que como sucedía en la ecuaciones de velocidad, el Jacobiano de las restricciones juega un papel fundamental en el análisis de aceleración. El segundo miembro de la Ec. 3.6.11 puede calcularse una vez que se ha obtenido la solución para las velocidades, haciendo posible un cálculo computacional eficiente y directo de la aceleración.

Para ilustrar el procedimiento a seguir, en la siguiente sección se lleva a cabo un análisis cinemático de los mecanismos planos CUADRILATERO ARTICULADO (CA) y TRIANGULO DE LADO VARIABLE (TLV).

5.5. Análisis Dinámico mediante el MER (*).

(Sección pendiente de desarrollo)