5.3. Definición de las Restricciones.

5.3.1. Introducción.

Partiendo de la base que para definir la posición y orientación de cuerpo en plano se van a utilizar dos coordenadas de posición y una coordenada angular, en esta sección se desarrolla una serie de restricciones. Se consideran tanto restricciones absolutas, las que pueden existir entre un cuerpo móvil y el fijo, como relativas, las que existen entre cuerpos móviles. Las restricciones desarrolladas incluyen restricciones puntuales y de orientación: absolutas y relativas, y las restricciones correspondientes a los pares giratorios y prismáticos. Además, y con el fin de controlar el movimiento de los sistemas mecánicos, se introducen una serie de restricciones de conducción.

5.3.2. Conceptos Básicos en Cinemática Plana.

La cinemática, como estudio del movimiento, es útil por dos razones. Por una parte, porque con frecuencia en ingeniería mecánica es necesario generar, transmitir, o controlar el movimiento mediante el uso de levas, engranajes, y mecanismos de barras. Y por otra parte, también a menudo es necesario determinar la respuesta dinámica de un sistema de cuerpos interconectados resultante de un conjunto de fuerzas aplicadas, formulando y resolviendo las ecuaciones del movimiento, siendo imprescindible para conseguir este objetivo tener cuantificada la cinemática del sistema.

En esta sección se recuerda el concepto de *cuerpo rígido*, se define el concepto *de sistema de referencia fijo con un cuerpo*. Se define de nuevo, el concepto de *mecanismo* y de *cinemática*, y se recuerda la distinción existente entre *análisis* y *síntesis*. Se introduce el concepto de *coordenadas generalizadas*, como conjunto de variables que especifican de forma unívoca la posición y orientación de todos los cuerpos que forman parte de un mecanismo. Se distingue entre coordenadas generalizadas independientes y dependientes, y se indica la forma de representar en esta asignatura a las coordenadas generalizadas que describen la *configuración del sistema* que se está analizando. Se indica que para determinar la configuración del sistema es necesario definir un sistema de referencia fijo con cada uno de los cuerpos que lo forman, y que de esta forma cualquier cuerpo se puede localizar en el plano especificando las coordenadas globales de posición del origen de su sistema de referencia y el ángulo que define la rotación de ese sistema respecto del sistema global. Se indica como de esta forma se definirá el vector columna de las coordenadas generalizadas correspondientes a ese cuerpo. Se establece la relación entre el vector de coordenadas generalizadas de cada cuerpo y el del sistema completo, indicándose que esas coordenadas no son independientes sino que están relacionadas por ecuaciones de restricción.

Por otra parte se define el concepto de *restricción cinemática* entre dos cuerpos, como las condiciones impuestas sobre el movimiento relativo de ambos. Se indica que cuando esas condiciones están expresadas mediante ecuaciones algebraicas en términos de las coordenadas generalizadas, reciben el nombre de *ecuaciones de restricción cinemáticas holonómicas*, y se indica la forma de representarlas. Se distingue entre restricciones temporales y restricciones estacionarias. Por último se definen las *restricciones no holonómicas* como aquellas ecuaciones que contienen desigualdades o relaciones entre componentes de velocidad.

A continuación se indica que el fundamento analítico del análisis cinemático ayudado por ordenador es una biblioteca de pares que restringen el movimiento de un cuerpo o el movimiento relativo entre pares de cuerpos. Y se insiste en una idea que es absolutamente fundamental, y es que las ecuaciones algebraicas de restricción asociadas a cada uno de esos pares deben ser totalmente equivalentes al par físico. Se comenta que a menudo las ecuaciones de restricción se obtienen a partir de la geometría del par, es decir que la geometría de par implica a la ecuación de restricción. Pero que esto no es suficiente, las ecuaciones de restricción también tienen que implicar a la geometría del par. Es decir, que esta aplicación debe ser en términos matemáticos biunívoca. Si no se formulan de esta forma el modelo matemático que se resuelve no definirá el movimiento real del sistema. En cualquier caso, sobre este asunto se insistirá cuando se desarrollen cada una de las restricciones.

Se define el concepto de *grados de libertad (GDL) de un sistema mecánico o movilidad*, como la diferencia entre el número de coordenadas generalizadas definidas en él, y el número de ecuaciones de restricción holonómicas definidas por los pares que lo forman. De esta forma se introduce la idea que las ecuaciones de restricción no son suficientes en número para determinar todas las coordenadas generalizadas asociadas al sistema, es decir su movimiento. Con lo que se indica que para determinar el movimiento del sistema, el ingeniero debe definir: (1) o bien un número GDL de condiciones adicionales de conducción que permitan unívocamente determinar las coordenadas generalizadas algebraicamente (*análisis cinemático*); (2) o bien las fuerzas que actúan sobre el sistema, en cuyo caso el vector de coordenadas generalizadas es la solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento (análisis dinámico).

A continuación se procede a desarrollar las ecuaciones en las que se basa el análisis cinemático, suponiendo por lo tanto que se han definido un número GDL de *restricciones de conducción*. Se puntualiza que a este tipo de sistemas se les denomina cinemáticamente conducidos. Se define el *vector de restricciones del sistema*, que incluye las restricciones cinemáticas y las de conducción, y se indica que este vector igualado a cero constituye el sistema de ecuaciones que habrá que resolver numéricamente para solucionar el *problema de posición*. Se indica que el vector de coordenadas generalizadas que se obtiene no se puede derivar temporalmente para obtener los vectores de velocidades y aceleraciones generalizadas, al haber sido obtenido de forma numérica. Con lo que para plantear el *problema de velocidad* es necesario derivar las ecuaciones de restricción utilizando la regla de la cadena, obteniéndose la *ecuación vectorial de velocidad*, indicándose la forma habitual de expresarla, e indicando que a la matriz de coeficiente se la denomina matriz jacobiana. Se indica a continuación que para plantear el *problema de aceleración* es necesario derivar las ecuaciones de velocidad utilizando la regla de la cadena, obteniéndose la *ecuación vectorial de aceleración*, indicándose la forma habitual de expresarla, e indicando de nuevo que a la matriz de coeficientes se la denomina matriz jacobiana.

Seguidamente se comenta que la *matriz jacobiana* que aparece en las ecuaciones de velocidad y aceleración juega un papel fundamental en la teoría y métodos numéricos de la cinemática y de la dinámica de mecanismos. Se indica que aunque podría ensamblarse directamente para todo el mecanismo usando las definiciones del cálculo matricial desarrollado en una sección previa, se ensamblará de una forma sistemática para cada una de las restricciones que se consideran en las siguientes secciones. Se insiste en que sin ninguna duda esta matriz es la más importante matriz que se utiliza en la cinemática y dinámica de los sistemas mecánicos restringidos. Se ponen dos ejemplos, que aunque son mecanismos elementales, ilustran el método basado en las ecuaciones de restricción (MER) para la formulación y solución de las ecuaciones cinemáticas de los sistemas mecánicos generales. El resto de esta sección se dedica a la derivación de una biblioteca de restricciones cinemáticas entre pares de cuerpos, que permitirán resolver un amplio rango de tipos de mecanismos y máquinas. Se indica que a las ecuaciones de restricción cinemáticas resultantes se les acoplarán las restricciones de conducción que determinarán de forma única el movimiento del sistema.

Con el fin de facilitar la interpretación de los desarrollos que se hacen en las siguientes secciones, se insiste en que se debe tener en cuenta que el objetivo del análisis cinemático ayudado por ordenador es la creación de un método sistemático para la formulación y resolución de las ecuaciones cinemáticas que pueda implementarse en un computadora digital. Y que sólo si se adopta un planteamiento sistemático podrá el ingeniero delegar en la computadora el arduo trabajo de la derivación analítica relacionada con el análisis. Es este objetivo el que provoca la aparición de matrices excesivamente grandes, como las que se encuentran en algunos ejemplos. En cualquier caso, se indica que las matrices jacobianas que se definen en muchos de los mecanismos que se analizan contienen muchos ceros y unos, y que esta estructura elemental se puede aprovechar adecuadamente para resolver de forma eficiente las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración del análisis cinemático.

Teniendo en cuenta lo largo del desarrollo que viene a continuación, no es posible desarrollar con todo detalle todas las ecuaciones de restricción cinemáticas y de conducción se hace preciso seleccionar algunas, tanto cinemáticas como de conducción, desarrollándolas con todo detalle, mostrando el procedimiento adecuado, y en los demás casos proporcionar las correspondientes ecuaciones tabuladas adecuadamente, para que sea posible formular mediante ellas los ejercicios que se propongan.

Las coordenadas generalizadas se designan en este texto con el vector columna $\mathbf{q} \equiv [q_1, \; q_2, \; \cdots, \; q_{nc}]^T$, donde nc es el número total de coordenadas utilizadas para describir la configuración del sistema.
Se define un sistema de referencia $x' - y'$ en cada uno de los cuerpos del sistema. El cuerpo i puede localizarse especificando las coordenadas globales $\mathbf{r}_i = [x, \; y]_i^T$ del origen del sistema de referencia $x'_i - y'_i$ definido en él, y el ángulo ϕ_i de rotación de dicho sistema respecto del sistema de referencia global $x - y$. El vector $\mathbf{q}_i = [x_i, \; y_i, \; \phi_i]^T$ es el vector de coordenadas generalizadas cartesianas correspondiente al cuerpo i. Utilizando coordenadas generalizadas cartesianas para cada cuerpo del sistema, se está definiendo un conjunto de coordenadas no reducido (máximo) para especificar la posición y orientación de cada cuerpo en el sistema.

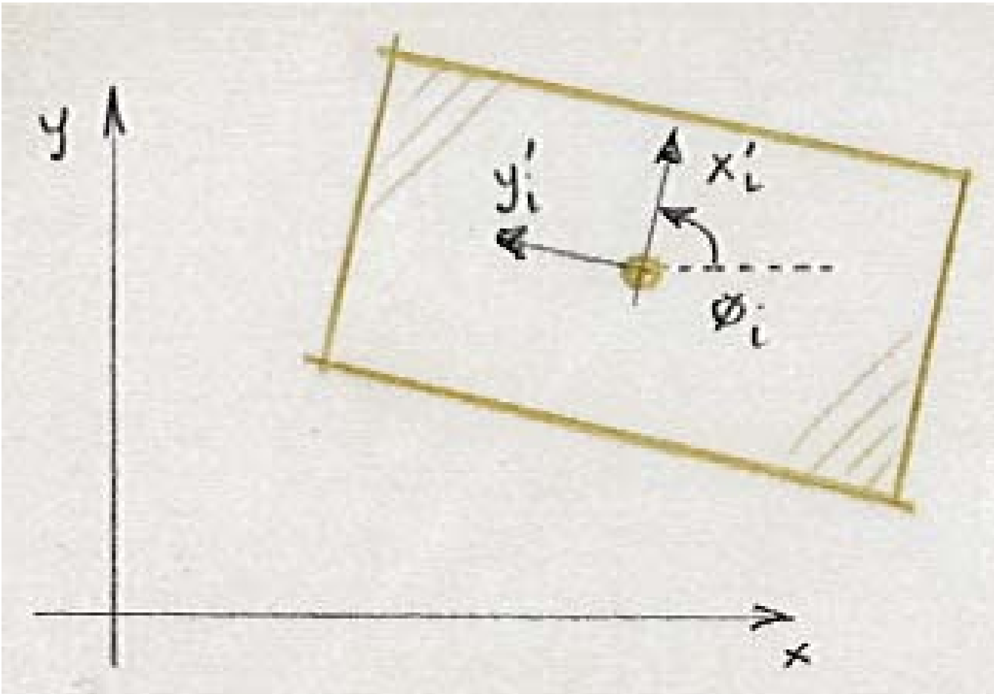

Imagen 4.33. Coordenadas generalizadas cartesianas correspondientes al cuerpo i.

Si el mecanismo plano está formado por nb componentes móviles, el vector de coordenadas generalizadas del sistema lo representaremos mediante $\mathbf{q} = \left[\mathbf{q}_1^T, \; \mathbf{q}_2^T, \; \cdots, \; \mathbf{q}_{nb}^T\right]^T$. Ya que los cuerpos rígidos que forman el mecanismo están interconectados mediante pares cinemáticos, existirán ecuaciones de restricción que relacionarán las coordenadas generalizadas. Por lo tanto, las coordenadas generalizadas cartesianas son generalmente dependientes (no independientes).
Una restricción cinemática entre dos cuerpos impone condiciones sobre el movimiento relativo entre ellos. Cuando esas condiciones están expresadas como ecuaciones algebraicas en función de las coordenadas generalizadas, se les denomina ecuaciones de restricción cinemáticas holonómicas. Un sistema de nh ecuaciones de restricción cinemáticas holonómicas que no dependen explícitamente del tiempo se puede expresar como: $\Phi^K(\mathbf{q}) = \left[\Phi_1^K(\mathbf{q}), \; \cdots, \; \Phi_{nh}^K(\mathbf{q})\right]^T = \mathbf{0}$. Este tipo de restricciones se les denomina restricciones estacionarias.
Si el tiempo aparece explícitamente, como en el caso de acoplamientos cinemáticos dependientes del tiempo, $\Phi^K(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$, donde t representa el tiempo, a las restricciones se les denomina restricciones dependientes del tiempo.

Existe un tipo de ecuaciones de restricción más generales que contienen desigualdades en función de componentes de velocidad que se denominan restricciones no holonómicas. En estas notas de clase se utilizará el término restricción para referir restricciones holonómicas, a no ser que se indique lo contrario.

La base analítica del análisis cinemático ayudado por ordenador consiste en una biblioteca de pares que restringen el movimiento de un cuerpo o el movimiento relativo de un par de cuerpos. Se deben obtener ecuaciones algebraicas de restricción que sean equivalentes a los pares físicos existentes.

Si $nc > nh$, es decir si el número total de coordenadas es superior al número de ecuaciones de restricción holonómicas, estas ecuaciones de restricción no son suficientes en número para determinar $\mathbf{q}$. Este suele ser la situación más usual, ya que un sistema mecánico normalmente ha sido designado para permitir el movimiento, lo cual le distingue de una estructura, cuya función es transmitir cargas y evitar el movimiento.

Si las restricciones son consistentes e independientes, entonces se dice que el sistema tiene movilidad igual a $nc - nh$, es decir $M = nc - nh$.

Para determinar el movimiento de un sistema, el ingeniero debe definir: (1) o bien un número M de condiciones adicionales de conducción que permitan unívocamente determinar $\mathbf{q}(t)$ algebraicamente (análisis cinemático); (2) o bien las fuerzas que actúan sobre el sistema, en cuyo caso $\mathbf{q}(t)$ es la solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento (análisis dinámico).

Si se han especificado un número M de restricciones de conducción independientes, que se representarán mediante $\Phi^D(\mathbf{q},t) = \mathbf{0}$, será posible determinar la configuración del sistema como una función del tiempo. Es decir, las restricciones combinadas

$$\Phi(\mathbf{q},t) = \begin{bmatrix} \Phi^K(\mathbf{q}) \\ \Phi^D(\mathbf{q},t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \text{Ec. 3.1.4}$$

podrán resolverse para obtener $\mathbf{q}(t)$. De un sistema de este tipo se dirá que es un sistema conducido cinemáticamente.

Si se supone que se han utilizado métodos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones previo y obtener $\mathbf{q}$ para instantes de tiempo discretos, ya que $\mathbf{q}$ no se conoce explícitamente como función del tiempo, no podrá diferenciarse para obtener $\dot{\mathbf{q}}$ o $\ddot{\mathbf{q}}$. Una alternativa que es adecuada para obtener valores numéricos, consiste en utilizar la regla de la cadena de la diferenciación y evaluar las derivadas de ambos miembros de la ecuación vectorial de las restricciones con respecto al tiempo para obtener la ecuación de velocidad:

$$\dot{\Phi} = \Phi_q\dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = \mathbf{0}$$

ó

$$\Phi_q\dot{\mathbf{q}} = -\Phi_{\mathbf{t}} \equiv \nu \qquad \text{Ec. 3.1.9}$$

Si Φ_q es una matriz no singular, esta ecuación vectorial se podrá resolver y obtener los valores de $\dot{\mathbf{q}}$ en instantes discretos de tiempo.

De forma similar, ambos miembros de la ecuación anterior se pueden diferenciar con respecto al tiempo, utilizando de nuevo la regla de la cadena, para obtener:

$$\Phi_q\ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_q\dot{\mathbf{q}})_q\dot{\mathbf{q}} + \Phi_{qt}\dot{\mathbf{q}} = -\Phi_{tq}\dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt}$$

donde con el fin de aplicar la regla de la cadena todas las variables se consideran independientes, en particular $\dot{\mathbf{q}}_q = \mathbf{0}$. Ya que $\Phi_{tq} = \Phi_{qt}$, este resultado se puede reordenar para obtener la ecuación de aceleración.

$$\Phi_q\ddot{\mathbf{q}} = -(\Phi_q\dot{\mathbf{q}})_q\dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{qt}\dot{\mathbf{q}} - \Phi_{\mathbf{tt}} = \gamma \qquad \text{Ec. 3.1.10}$$

Si Φ_q es una matriz no singular, esta ecuación vectorial se podrá resolver y obtener los valores de $\ddot{q}$ en instantes discretos de tiempo.

La matriz Φ_q que aparece en las ecuaciones de velocidad y aceleración juega un papel fundamental en la teoría y métodos numéricos de la cinemática y de la dinámica de mecanismos. Se le denomina matriz jacobiana, o simplemente jacobiano. Aunque podría ensamblarse fácilmente usando las definiciones del cálculo matricial desarrollado, se ensamblará de una forma sistemática para cada una de las restricciones que se consideran mas tarde en este capítulo. Sin ninguna duda, esta matriz es la más importante matriz que se utiliza en la cinemática y dinámica de los sistemas mecánicos restringidos.

La evaluación de los segundos miembros de la ecuación de aceleración necesita el calculo de derivadas segundas. Para ser mas específicos:

$$\Phi_{tt} = \left[\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial\ t^2}\right]_{nhx1}$$

$$\Phi_{qt} = \left[\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_j\ \partial t}\right]_{nhxnc}$$

y

$$(\Phi_q \dot{q})_q = \left[\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{nc} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\right]_{ncxnc} = \left[\sum_{k=1}^{nc} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k\right]_{ncxnc}$$

Los Ejemplos 1 (3.1.1) y 2 (3.1.2), aunque tratan mecanismos elementales, ilustran una aproximación que se utiliza a lo largo del texto para la formulación y solución de las ecuaciones cinemáticas de los sistemas mecánicos generales. El resto del tema se dedica a la derivación de una biblioteca de restricciones cinemáticas entre pares de cuerpos que se podrán utilizar para ensamblar las ecuaciones cinemáticas de un amplio rango de clases de mecanismos y máquinas. A las ecuaciones de restricción cinemáticas resultantes se les acoplarán las restricciones de conducción que determinarán de forma única el movimiento del sistema.

Como una ayuda adicional en la interpretación de los desarrollos que siguen, el alumno debe tener en cuenta el objetivo del análisis cinemático ayudado por ordenador es la creación de un método sistemático para la formulación y resolución de las ecuaciones cinemáticas que pueda implementarse en un computador digital. Solo si se adopta un planteamiento sistemático podrá el ingeniero delegar en el computador el arduo trabajo de la derivación analítica relacionada con el análisis. Es este objetivo el causante de la aparición de matrices excesivamente grandes, como las que se encuentran en el Ejemplo 2 (3.1.2). El lector debería tener en cuenta que la matriz Jacobiana Φ_q, obtenida para el mecanismo deslizadera manivela, contiene muchos ceros y unos. Esta estructura elemental se explota para resolver de forma eficiente las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración del análisis cinemático.

5.3.3. Restricciones Absolutas.

En esta sección se desarrollan las ecuaciones correspondientes a las restricciones que pueden existir entre un cuerpo móvil y el cuerpo fijo. Estas ecuaciones de restricción estarán expresadas únicamente en función de las coordenadas generalizadas de un solo cuerpo. Se consideran tres tipos de restricciones: la *restricción distancia absoluta*, la *restricción posición absoluta*, y *la restricción angular absoluta*.

En muchos mecanismos, el movimiento de un cuerpo está restringido con respecto al cuerpo fijo, es decir respecto al sistema de referencia $x - y$ estacionario. En este caso, las ecuaciones de restricción deberán expresarse como relaciones entre las coordenadas generalizadas correspondientes a un único cuerpo, al no existir ningún cuerpo adicional en movimiento.

5.3.4. Restricciones Relativas.

En esta sección se desarrollan las ecuaciones correspondientes a las restricciones mas habituales que pueden existir entre dos cuerpos móviles que están conectados mediante pares. Estas ecuaciones de restricción estarán expresadas únicamente en función de las coordenadas generalizadas correspondientes a los dos cuerpos. La técnica empleada para la formulación de las ecuaciones de restricción cinemáticas correspondientes a los pares que se consideran es esta sección, se podrá aplicar para la formulación de las ecuaciones correspondientes a otros tipos de pares.

Se insiste en que el objetivo de cada par de los considerados es definir un conjunto de ecuaciones de restricción algebraicas que sean “equivalentes al par físico”. Es importante que las ecuaciones empleadas impliquen a las restricciones de posición relativa y orientación impuestas por el par físico, para que dicho par este adecuadamente representado por esas ecuaciones. Se insiste en que es fácil escribir ecuaciones están implicadas por la geometría de la par, pero que no implican dicha geometría. Si se definen de esta forma, el modelo computacional no representará la cinemática del sistema real, y además aparecerán dificultades numéricas en el proceso de solución.

Se consideran tres conjuntos de restricciones. Un primer conjunto denominado *restricciones relativas en coordenadas*, que incluye: (1) la restricción relativa *en x*; (2) la restricción relativa *en y*; (3) la restricción relativa *en ángulo*; y (4) la restricción *distancia relativa*. Se proporcionan algunos ejemplos.

Un segundo conjunto que corresponde a los *pares giratorio y prismático*. En este caso se indica que para tratar con restricciones complejas entre cuerpos, resulta de utilidad dibujar figuras que ayuden en el desarrollo de las ecuaciones vectoriales que definen las restricciones. Se proporcionan algunos ejemplos.

Las restricciones descritas en la sección previa imponen restricciones en el movimiento de un único cuerpo respecto al cuerpo fijo. En muchos sistemas cinemáticos, las restricciones están definidas sobre la posición y orientación relativa de dos cuerpos que están conectados por pares cinemáticos. En esta sección, se fórmulas las restricciones correspondientes a los pares cinemáticos mas comúnmente utilizados. La técnica que se emplea para formular las ecuaciones de restricción cinemáticas para esos pares puede ser utilizada en la mayoría de los pares de propósito especial que se utilizan comúnmente.

El objetivo para cada par de los considerados es definir un conjunto de ecuaciones algebraicas de restricción que sean *equivalentes al par físicamente definido*. Ya que el par físico va a ser representado por ecuaciones de restricción, es importante que las ecuaciones empleadas impliquen directamente las restricciones sobre posición y orientación impuestas por el par físico. Es fácil formular ecuaciones que se deducen a partir de la geometría de par, pero a partir de las cuales no tiene porque deducir exactamente la geometría de dicho par. Si se comete este error, el modelo computacional fallará al representar la cinemática física real, y aparecerán dificultades numéricas.

(Todas las secciones anteriores están pendientes de desarrollo)