5.2. Relaciones Vectoriales Básicas del MER.

En esta sección se presentan *las relaciones vectoriales básicas* en las que se basa *el método de análisis cinemático* basado en el MER (Método de las Ecuaciones de Restricción). Se considera un sistema de referencia cartesiano fijo en un cuerpo móvil, que permite definir su posición y orientación con respecto a un sistema de referencia global estacionario. Se considera un punto del cuerpo móvil citado. Se presenta la relación entre el vector de posición de ese punto respecto del sistema de referencia global y el sistema de referencia móvil, utilizando la matriz de rotación que se obtuvo anteriormente. A continuación se obtienen las derivadas temporales del vector de posición de ese punto, es decir, su velocidad y su aceleración, definiéndose las derivadas temporales de la matriz de rotación.

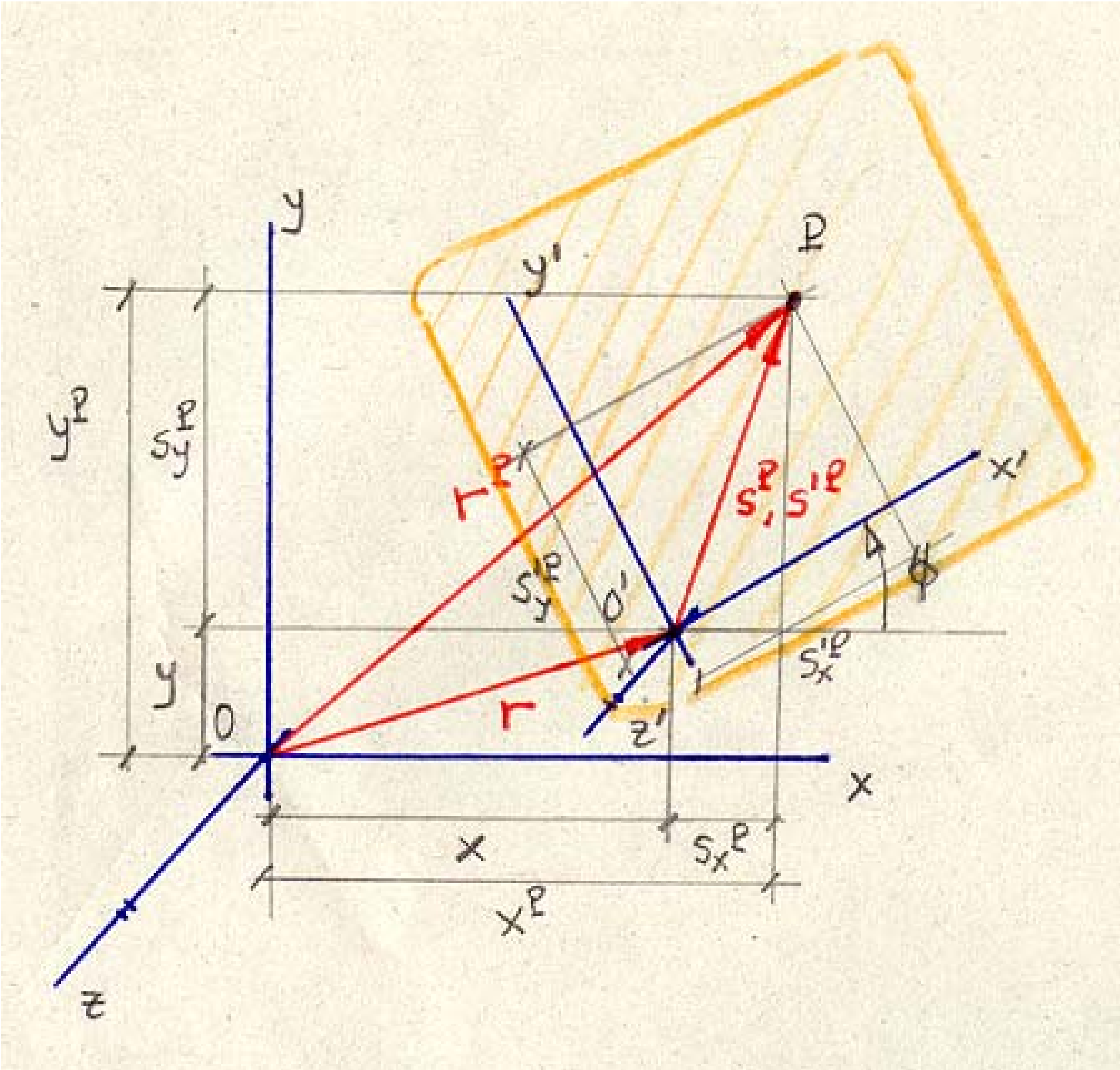

Imagen 4.32. El punto P está fijo en un sistema de referencia $x' - y'$

Muy a menudo en las aplicaciones, un sistema de referencia Cartesiano $x' - y'$ esta fijo en un cuerpo móvil para definir su posición y su orientación, con respecto a un sistema de referencia global $x - y$ estacionario. Considere el punto P que esta fijo en un sistema de referencia $x' - y'$, como se muestra en la Fig. 12. El vector que localiza (vector de posición) al punto P en el sistema de referencia $x - y$ está dado por la Ec. 2.4.8 como:

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{r} + \mathbf{s}^P = \mathbf{r} + \mathbf{A}\mathbf{s}'^P$$ Ec. 2.6.1

donde $\mathbf{s}'^P$ es el vector constante de las coordenadas del punto P en el sistema de referencia $x' - y'$ y $\mathbf{A}$ es la matriz de transformación entre el sistema $x' - y'$ y el sistema $x - y$.

Al estar el sistema $x' - y'$ moviéndose y cambiando su orientación con el tiempo, el vector $\mathbf{r}$ y la matriz de transformación $\mathbf{A}$ son funciones del tiempo. Los resultados sobre diferenciación que se obtuvieron en la Sección 6.5 se pueden utilizar para obtener las derivadas temporales de $\mathbf{r}^P$, como:

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{s}'^P$$ Ec. 2.6.2

Utilizando la Ec. 2.4.4:

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}(\phi) = \dot{\phi}\frac{d}{d\phi}\mathbf{A} = \dot{\phi}\begin{bmatrix} -\sin\phi & -\cos\phi \\ \cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} \equiv \dot{\phi}\,\mathbf{B} \qquad \text{Ec. 2.6.3}$$

Por lo que la Ec. 2.6.2 quedará:

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\phi}\mathbf{B}\mathbf{s}'^P \qquad \text{Ec. 2.6.4}$$

Téngase en cuenta que utilizando la matriz de rotación ortogonal **R** , Ec. 2.3.6, tendremos:

Ec. 2.6.5

y también:

$$\mathbf{AR} = \mathbf{RA} \qquad \text{Ec. 2.6.5}$$

Por lo tanto, la Ec. 2.6.4 puede escribirse como:

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\phi}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{s}'^P = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\phi}\mathbf{A}\mathbf{s}'^{P\perp} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\phi}\mathbf{s}^{P\perp} \qquad \text{Ec. 2.6.7}$$

Por último, teniendo en cuenta que:

$$\dot{\mathbf{B}} = \dot{\phi}\frac{d}{d\phi}\mathbf{B} = \dot{\phi}\begin{bmatrix} -\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix} = -\dot{\phi}\mathbf{A} \qquad \text{Ec. 2.6.8}$$

Tomando la derivada temporal de la Ec. 2.6.4, obtenemos la aceleración del punto **P** como:

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\phi}\mathbf{B}\mathbf{s}'^P + \dot{\phi}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{s}'^P = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\phi}\mathbf{B}\mathbf{s}'^P - \dot{\phi}^2\mathbf{A}\mathbf{s}'^P \qquad \text{Ec. 2.6.9}$$

Formas alternativas de esta misma ecuación se pueden obtener utilizando las Ecs. 2.6.5 y 2.6.6, como:

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\phi}\mathbf{A}\mathbf{s}'^{P\perp} - \dot{\phi}^2\mathbf{A}\mathbf{s}'^P = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\phi}\mathbf{s}^{P\perp} - \dot{\phi}^2\mathbf{s}^P \qquad \text{Ec. 2.6.1}$$