5. Método de las Ecuaciones de Restricción (MER).

5.1. Conceptos matemáticos previos.

5.1.1. Introducción.

Esta es una de las secciones de las dedicadas a analizar la cinemática y dinámica de sistemas mecánicos en los que todos los cuerpos se mueven en un plano o en planos paralelos. Las razones que motivan el comenzar presentando los métodos aplicados a sistemas planos se basa en las siguientes consideraciones: (1) la representación analítica de la posición y orientación de cuerpos en al plano es mucho menos compleja que la de cuerpos en el espacio; (2) los conceptos analíticos y los métodos de creación de modelos son mucho más fáciles de aprender en el contexto de los sistemas planos; y (3) conocidos estos conceptos, su extensión a la aplicación a sistemas espaciales resulta fácil de comprender. Teniendo esto en cuenta, en esta sección se introduce el análisis basado en vectores y los conceptos relacionados con la posición y orientación de cuerpos en el plano. Se indica que el álgebra de vectores y matrices forma los fundamentos matemáticos de la cinemática y dinámica, y que el estudio de la geometría del movimiento es el primer paso para abordar el análisis cinemático y dinámico de los sistemas mecánicos. Se indica que el álgebra vectorial en su forma geométrica no es adecuada para la formulación computacional del problema. Por ello, en este tema se presenta una formulación matricial sistemática del álgebra vectorial a la que se denomina *representación vectorial algebraica*, y que se desarrollará a lo largo de toda esta parte de la asignatura. Esta forma de representación vectorial, en contraste con la tradicional forma geométrica, es más fácil de utilizar, tanto para la manipulación de fórmulas, como para la implementación computacional. Teniendo en cuenta que el cálculo diferencial de varias variables juega un papel fundamental tanto para formular como para resolver las ecuaciones del movimiento de los sistemas mecánicos, en esta sección se desarrolla sus ideas básicas.

5.1.2. Vectores Geométricos.

En esta sección se revisan las ideas básicas sobre vectores geométricos en el plano. Se da una definición, se recuerda la regla del paralelogramo, se introduce el concepto de sistema de referencia cartesiano ortogonal, las componentes cartesianas de un vector, el concepto de vector unitario, el concepto de producto escalar de dos vectores, el concepto de vectores ortogonales y su representación. Por último se resuelven algunos ejemplos (Esta sección está en fase de desarrollo).

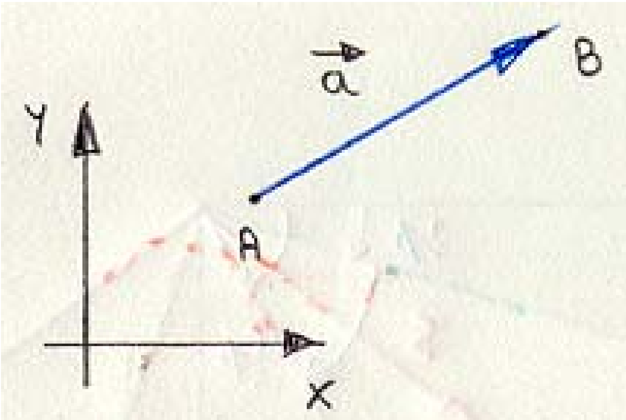

Imagen 4.23. Vector que parte del punto A y va al punto B.

Regla del paralelogramo:

$$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$$

Regla del paralelogramo:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$

$$(\alpha + \beta)\ \vec{a} = \alpha\ \vec{a} + \beta\ \vec{b}$$

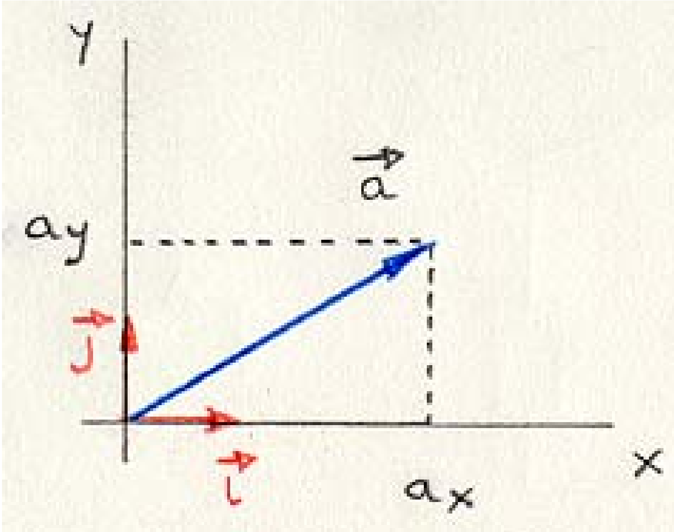

Imagen 4.24. Componentes cartesianas de un vector:

Componentes cartesianas de un vector:

$$\vec{a} = a_x\ \vec{i} + a_y\ \vec{j}$$

Suma de dos vectores:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\ \vec{i} + (a_y + b_y)\ \vec{j} = c_x\ \vec{i} + c_y\ \vec{j}$$

Producto escalar (dot product) de dos vectores:

$$\vec{a} \, . \, \vec{b} = a\ b\ \cos\ \theta(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \, . \, \vec{b} = \vec{b} \, . \, \vec{a}$$

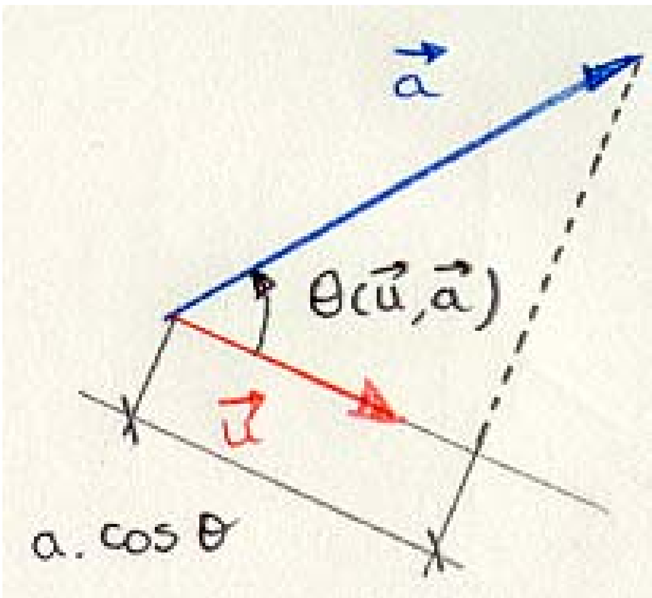

Imagen 4.25. Proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{u}$

Vectores unitarios:

$$\vec{i} \, . \, \vec{j} = \vec{j} \, . \, \vec{i} = 0$$
$$\vec{i} \, . \, \vec{i} = \vec{j} \, . \, \vec{j} = 0$$

Para cualquier vector:

$$\vec{a} \, . \, \vec{a} = a\ a\ \cos\ 0 = a^2$$

Propiedades del producto escalar:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \, . \, \vec{c} = \vec{a} \, . \, \vec{c} + \vec{b} \, . \, \vec{c}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \; b_x + a_y \; b_y$

$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

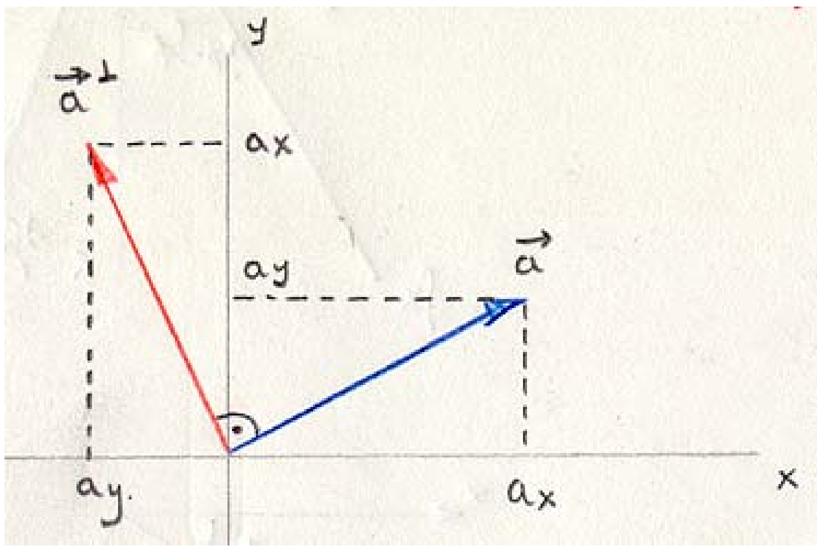

Imagen 4.26. Vector perpendicular al vector $\vec{a}$.

Vector perpendicular a un vector dado:

$$\vec{a}^{\perp} = -a_y \; \vec{i} + a_x \; \vec{j}$$

5.1.3. Algebra Matricial.

En primer lugar se insiste en que la utilización de matrices permite la representación sistemática de un sistema de ecuaciones, así como la organización de su desarrollo, simplificación y solución. A continuación se define el concepto de matriz, dimensiones de una matriz, el concepto de transpuesta de una matriz, matriz columna y matriz fila, y se indica la forma de representarlas dando algunos ejemplos. Se recuerdan los conceptos de matriz cuadrada, de matriz diagonal, de matriz identidad, matriz nula, suma de matrices, diferencia entre dos matrices y término general de una matriz y se dan algunos ejemplos. Seguidamente se recuerda el concepto de producto de matrices, producto de una matriz por un escalar, y matriz simétrica. Se introduce el concepto de *matriz anti-simétrica*, concepto muy utilizado en cinemática, y se comentan algunas propiedades de las operaciones con matrices. Se introducen los conceptos de dependencia e independencia lineal, y se dan algunos ejemplos. A continuación se introduce el concepto de rango de una matriz, matriz de rango completo, matriz singular, matriz no singular, y se recuerda el concepto de matriz inversa. Se introduce el concepto de *matriz ortogonal* , otro concepto muy utilizado en cinemática, y se dan algunos ejemplos.

Matriz de dimensiones m x n:

$$\mathbf{A} \equiv \left[a_{ij}\right] \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Traspuesta de una matriz:

$\mathbf{A}^T$

Matriz columna:

$$\mathbf{a} = \left[a_1, \; a_2, \; \ldots \; , \; a_n\right]^T$$

Matriz fila:

$\mathbf{b} = [b_1, \ b_2, \ \ldots \ , \ b_m]$

Representación de una matriz:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_2, \ \ldots \ , \ \mathbf{a}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix}$$

Suma de matrices:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (\ a_{ij} + b_{ij} \ )$$

Tres matrices con la misma dimensión:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \mathbf{B} \ + \mathbf{C}$$

Producto de matrices:

$$\mathbf{A} \equiv [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} , \quad \mathbf{B} \equiv [b_{ij}] = [\mathbf{b}_1, \ \mathbf{b}_2, \ \ldots \ , \ \mathbf{b}_n]$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \ \mathbf{B} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \ b_{kj} \right] = [c_{ij}]$$

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \ \mathbf{b}_j$$

$$\mathbf{A} \ \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \ \mathbf{A}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \ \mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$
$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}$$

Multiplicación de una matriz por un escalar:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} = [\alpha a_{ij}]$$

Matriz simétrica:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \ , \ a_{ij} = a_{ji} \ , \ \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

Matriz “simetrica-skew” o anti-simetrica:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \ , \ a_{ij} = -a_{ji}, \ a_{ii} = 0, \ \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

Propiedades:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$
$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

Condición de dependencia lineal:

$$\mathbf{a}_j \ , \ j=1,\ldots,m \ ; \ \sum \alpha_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \ ; \ \alpha_j \neq 0 \ , \ j=1,\ldots,m$$

Condición de independencia lineal:

$$\mathbf{a}_j \;,\; j=1,\ldots,m \;;\; \sum \alpha_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \;;\; \alpha_j = 0 \;,\; j=1,\ldots,m$$

A una matriz cuadrada **A** de rango completo (‘full rank”) se la denomina matriz no singular. Para este tipo de matrices existe la matriz inversa:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Matriz ortogonal:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \;,\; \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

5.1.4. Vectores Algebraicos.

En esta sección se comienza presentando la representación algebraica de un vector frente a su representación geométrica, respecto a un sistema cartesiano de referencia. Se indica que cuando un vector algebraico representa a un vector geométrico en el plano, el vector algebraico posee dos componentes. Se indica la representación algebraica de la suma de dos vectores, de producto de un vector por un escalar, del vector nulo. Se indica que la representación algebraica de vectores permite la definición de vectores con mas de tres componentes, denominándoselos n vectores. Se presenta la representación algebraica del producto escalar de dos vectores geométricos, de un vector ortogonal a un vector dado, introduciéndose el concepto de matriz de rotación ortogonal y se dan algunos ejemplos.

Representación geométrica de un vector en el sistema de referencia cartesiano $x - y$:

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

Representación algebraica de un vector en el sistema de referencia cartesiano $x - y$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x, & a_y \end{bmatrix}^T$$

Suma de dos vectores en forma geométrica:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Suma de dos vectores en forma algebraica:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

La representación algebraica permite que sea posible definir vectores con mas de tres componentes. Por ejemplo, los siguientes vectores algebraicos podrían combinarse para formar un vector de 6 componentes:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x, & a_y \end{bmatrix}^T ,\; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x, & b_y \end{bmatrix}^T ,\; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_x, & c_y \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} a_x, & a_y, & b_x, & b_y, & c_x, & c_y \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T, & \mathbf{b}^T, & \mathbf{c}^T \end{bmatrix}$$

Producto escalar de dos vectores geométricos en forma algebraica:

$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$

Vector perpendicular a un vector dado en forma geométrica:

$$\vec{a}^{\perp} = -a_y\,\vec{i} + a_x\,\vec{j}$$

Vector ortogonal (perpendicular) a un vector dado, representado en forma algebraica:

$$\mathbf{a}^{\perp} = \begin{bmatrix} -a_y \\ a_x \end{bmatrix} = \mathbf{Ra}$$

R es la matriz de rotación ortogonal:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;,\; \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \;,\; \mathbf{RR} = -\mathbf{I} \qquad \text{Ec. 2.3.6}$$

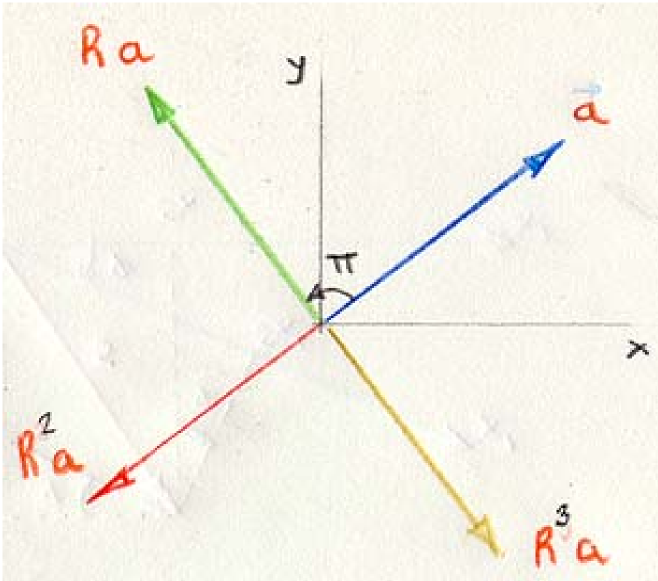

Imagen 4.27. Rotación de un vector $\vec{a}$.

5.1.5. Transformación de Coordenadas.

Se proporciona la representación algebraica de un mismo vector en dos sistemas de coordenadas cartesiano con el mismo origen. Se desarrolla la relación matemática que existe entre ambos, obteniéndose la denominada *matriz de rotación*. Se presenta la ecuación que relaciona ambos vectores cuando los orígenes de los sistemas de referencia cartesianos no coinciden, ecuación que se utiliza posteriormente. Se presentan algunos ejemplos.

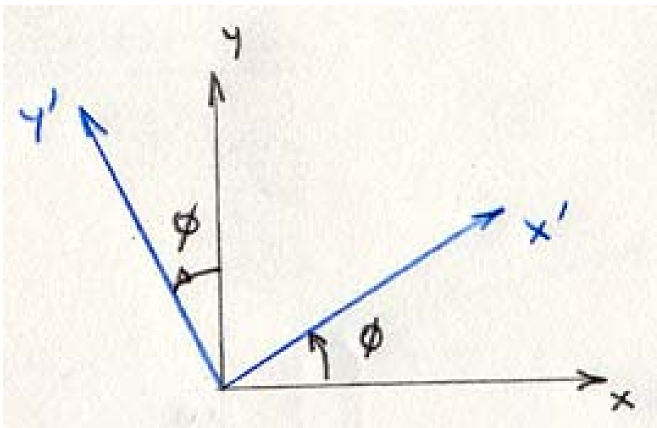

Imagen 4.28. Dos sistemas de referencia cartesianos con el mismo origen.

Sistema de referencia cartesiano $x - y$ fijo, un segundo sistema de referencia cartesiano $x' - y'$, con el mismo origen, con un ángulo ϕ entre sus ejes X e x', positivo en sentido contrario al reloj. Un vector geométrico $\vec{s}$ puede representarse mediante los vectores algebraicos:

$$\mathbf{s} = \left[s_x \;,\; s_y \right]^T$$

$$\mathbf{s}' = \left[s_{x'} \;,\; s_{y'} \right]^T$$

Por trigonometría elemental:

$$s_x = s_{x'} \cos\phi - s_{y'} \sin\phi$$

$$s_y = s_{x'} \sin\phi + s_{y'} \cos\phi$$

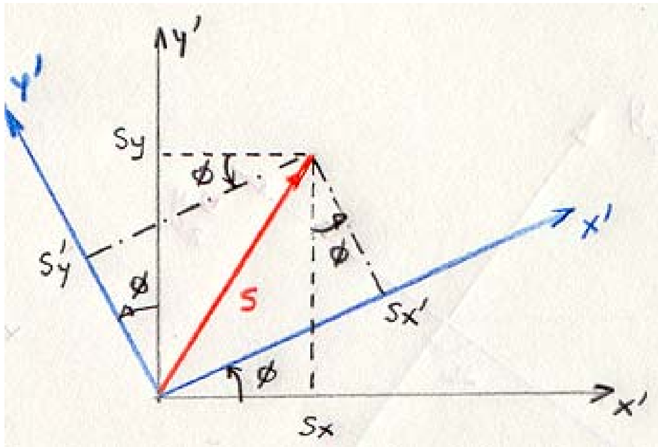

Imagen 4.29. Vector $\vec{s}$ en los dos sistemas de referencia cartesianos con el mismo origen.

Por lo tanto, **s** y **s'** están relacionados por la matriz de transformación:

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{s}'$$

Matriz de transformación de rotación:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\phi) \equiv \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

A es ortogonal, por lo tanto $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, y:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A}^T\mathbf{s}$$

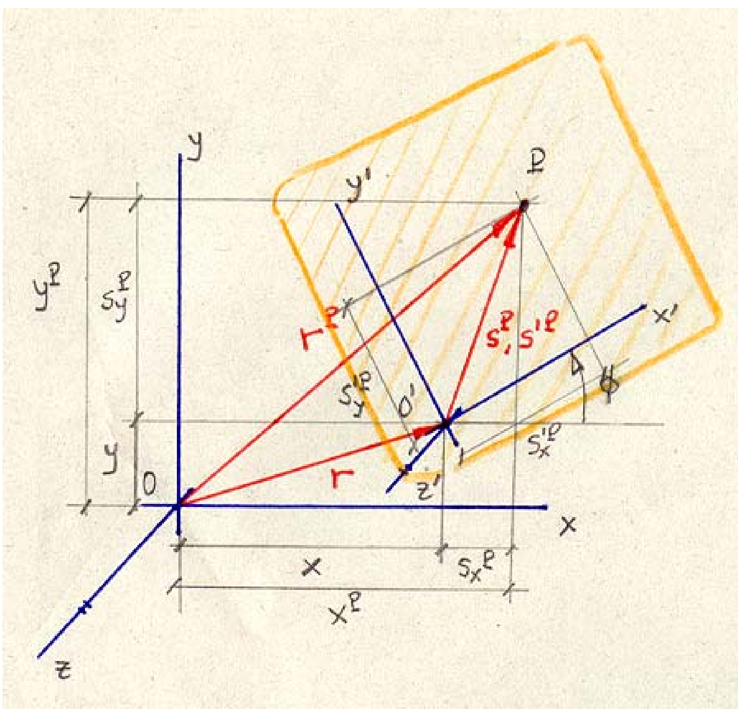

Imagen 4.30. Traslación y rotación entre sistemas de referencia cartesianos.

Cuando los orígenes de los sistemas de coordenadas $x - y$ e $x' - y'$ no coinciden, el análisis llevado a cabo previamente se puede aplicar entre los sistemas de referencia $x - y$ y el trasladado $x' - y'$.

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{r} + \mathbf{s}^P = \mathbf{r} + \mathbf{A}\mathbf{s}'^P \qquad \text{Ec. 2.4.8}$$

Consideremos un par de sistemas de referencia:

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}_i\mathbf{s}'_i = \mathbf{A}_j\mathbf{s}'_j$$

Como $\mathbf{A}_i$ y $\mathbf{A}_j$ son ortogonales:

$$\mathbf{s}'_i = \mathbf{A}_i^T\mathbf{A}_j\mathbf{s}'_j \equiv \mathbf{A}_{ij}\mathbf{s}'_j$$

$\mathbf{A}_{ij}$ es la matriz de transformación entre ambos sistema de coordenadas:

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_i^T\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \cos(\phi_j - \phi_i) & -\sin(\phi_j - \phi_i) \\ \sin(\phi_j - \phi_i) & \cos(\phi_j - \phi_i) \end{bmatrix}$$

que no es mas que la matriz de transformación de rotación ortogonal debida a la rotación del sistema de referencia jun ángulo $\phi_j - \phi_i$ respecto al sistema de referencia i .

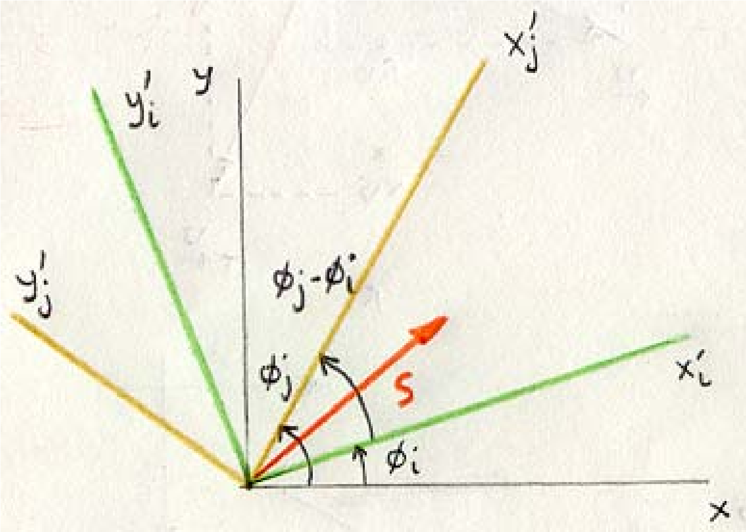

Imagen 4.31. Tres sistemas de referencia cartesianos con el mismo origen.

5.1.6. Diferenciación de Vectores y Matrices.

Se indica que en la cinemática y dinámica de sistemas mecánicos, los vectores que representan las posiciones de los puntos en los cuerpos, y las ecuaciones que describen la geometría del sistema van a ser funciones del tiempo y de algunos otras variables, con lo que al analizar esas ecuaciones para obtener velocidades y aceleraciones, necesariamente tendrán que calcularse sus derivadas temporales y sus derivadas parciales. En esta sección se define dichas derivadas y se introduce la notación de calculo diferencial matricial que se utilizará a lo largo de toda la asignatura.

Se comienza analizando las derivadas de vectores que localizan puntos. Se presenta la derivada temporal de un vector utilizando su representación geométrica y su representación algebraica, es decir utilizando notación matricial. Se define la derivada de la suma de dos vectores, la regla del producto para la derivación. Se indica como calcular la velocidad y la aceleración de ese punto, y se dan algunos ejemplos. A continuación se presenta la derivada temporal de una matriz cuyas componentes dependen del tiempo y se revisan las reglas elementales de diferenciación. Seguidamente se indica que al tratar con sistemas de ecuaciones diferenciales y algebraicas no lineales en varias variables, que son las que aparecerán en los análisis cinemático y dinámico de los sistemas mecánicos, será esencial emplear la notación del cálculo matricial. Por lo que se presenta dicha notación. Se introduce el vector de variables del sistema, una función diferenciable de ese vector, y un vector de un vector de funciones diferenciables escalares del mismo. Se define a continuación la notación del cálculo diferencial que se utilizará, definiendo las derivadas de ambos. Se insiste en que según esta notación, la derivada de una función escalar con respecto a una variable vectorial es un matriz fila, y que este es uno de los pocos símbolos en el desarrollo que es una matriz fila, en lugar del más común matriz columna. Se insiste también en que la derivada de una función vectorial, cuyos elementos son funciones de la variable vectorial del sistema, es una matriz. Se indica que la notación utilizando subíndices que se utiliza aquí, resulta útil en adelante para evitar confusiones al derivar parcialmente. Para sacar partido de esta notación, sin embargo, es de crítica importancia que se utilice una definición matricial correcta de las derivadas.

Por último, se presentan por una parte la *regla de diferenciación para el producto escalar de dos vectores*, insistiendo en que la que podría intuitivamente parecer como la apropiada regla de la diferenciación para el producto, ni si quiera está definida, y mucho menos es válida. Y por otra, la regla de la cadena para la diferenciación de funciones vectoriales de varias variables utilizando la notación de cálculo matricial presentada. Se procede a resolver algunos ejemplos.

Al analizar velocidades y aceleraciones, se deben calcular las derivadas temporales de vectores que localizan puntos. Consideremos el vector $\vec{a}(t)$.

Representación geométrica del vector en el sistema de referencia cartesiano estacionario x – y:

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\ \vec{i} + a_y(t)\ \vec{j}$$

Representación algebraica del vector en el sistema de referencia cartesiano estacionario x – y:

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x(t), & a_y(t) \end{bmatrix}^T$$

Derivada temporal del vector $\vec{a}(t)$ utilizando su representación geométrica:

$$\dot{\vec{a}}(t) \equiv \frac{d}{dt}\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left[\ a_x(t)\ \vec{i} + a_y(t)\ \vec{j}\ \right] = \left[\frac{d}{dt}a_x(t)\right]\ \vec{i} + \left[\frac{d}{dt}a_y(t)\right]\ \vec{j}$$

Derivada temporal del vector $\vec{a}(t)$ utilizando su representación algebraica, es decir notación matricial:

$$\dot{\mathbf{a}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{a} = \left[\frac{d}{dt}a_x, \ \frac{d}{dt}a_y\right]^T = \left[\dot{a}_x, \ \dot{a}_y\right]^T$$

Por lo tanto, para vectores que están representados en términos de sus componentes en un sistema de referencia cartesiano estacionario, la derivada temporal se obtiene diferenciando sus componentes:

Derivada de la suma de dos vectores:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}}$$

Regla del producto para la diferenciación:

$$\frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{a}) = \dot{\alpha}\mathbf{a} + \alpha\dot{\mathbf{a}}$$
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}^T\mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}}^T\mathbf{b} + \mathbf{a}^T\dot{\mathbf{b}} \qquad \text{Ec. 2.5.13}$$

Si $\mathbf{a}$ es el vector de posición que permite localizar la posición de un punto en un sistema de referencia cartesiano estacionario, $\dot{\mathbf{a}}$ será las velocidad de ese punto. Si el módulo de un vector $\mathbf{a}(t)$ es constante, es decir si $\mathbf{a}(t)^T\mathbf{a}(t) = c$, entonces $\dot{\mathbf{a}}^T\mathbf{a} = 0$. Esto indica que la velocidad de un punto cuya distancia al origen del sistema de referencia es constante es ortogonal (perpendicular) al vector de posición de ese punto. La segunda derivada temporal de $\mathbf{a}(t)$ es la aceleración del punto:

$$\ddot{\mathbf{a}} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{a}(t)\right) = \left[\ddot{a}_x, \quad \ddot{a}_y\right]^T$$

Derivada temporal de una matriz, $\mathbf{B}(t) = \left[b_{ij}(t)\right]$ cuyas componentes dependen de t :

$$\dot{\mathbf{B}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{B} = \left[\frac{d}{dt}b_{ij}\right]$$

Reglas elementales de diferenciación:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{C}}$$
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{BC}) = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{C} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{C}}$$
$$\frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{B}) = \dot{\alpha}\mathbf{B} + \alpha\dot{\mathbf{B}}$$

Al tratar con sistemas de ecuaciones diferenciales y algebraicas no lineales en varias variables , que son las que aparecen en los análisis cinemático y dinámico de sistemas mecánicos, es esencial emplear la notación del calculo matricial. Para comenzar a utilizar la notación que se empleará aquí, hagamos que:

$\mathbf{q} = \left[q_1, \quad \cdots \quad , \quad q_k\right]^T$ sea un k-vector de variables reales,

$a(\mathbf{q})$ una función diferenciable escalar de $\mathbf{q}$, y

$\Phi(\mathbf{q}) = \left[\Phi_1(\mathbf{q}), \quad \cdots, \quad \Phi_n(\mathbf{q})\right]^T$ un n-vector de funciones diferenciables de $\mathbf{q}$.

Utilizando como índice de fila i y como índice de columna j, definimos la siguiente notación de cálculo matricial:

$$a_{\mathbf{q}} \equiv \frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} \equiv \left[\frac{\partial a}{\partial q_j}\right]_{1xk}$$

$$\Phi_{\mathbf{q}} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \equiv \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}\right]_{nxk}$$

Téngase en cuenta que la derivada de una función escalar con respecto a una variable vectorial es un matriz fila. Este es uno de los pocos símbolos en el texto que es una matriz fila, en lugar del mas común matriz columna. Téngase en cuenta también, que la derivada de una función vectorial Φ, cuyos elementos son funciones de la variable vectorial $\mathbf{q}$, es una matriz. La notación utilizando subíndices que se utiliza aquí, resulta útil en adelante para evitar confusiones al derivar parcialmente. Para sacar partido de esta notación, sin embargo, es de crítica importancia que se utilice una definición matricial correcta de las derivadas.

La derivada parcial del producto escalar de dos funciones de n-vectores,

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left[g_1(\mathbf{q}),\ \cdots,\ g_n(\mathbf{q})\right]^T \text{ y } \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \left[h_1(\mathbf{q}),\ \cdots,\ h_n(\mathbf{q})\right]^T,$$

tras una cuidadosa manipulación, resulta ser la regla del producto para la diferenciación:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{g}^T\mathbf{h}) = (\mathbf{g}^T\mathbf{h})_{\mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\sum_{k=1}^{n} g_k h_k) = \left[\frac{\partial}{\partial q_j}(\sum_{k=1}^{n} g_k h_k)\right] =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n}(\frac{\partial g_k}{\partial q_j} h_k + g_k \frac{\partial h_k}{\partial q_j})\right] = \left[\sum_{k=1}^{n}(h_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j}) + \sum_{k=1}^{n}(g_k \frac{\partial h_k}{\partial q_j})\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{g}^T\mathbf{h}) = (\mathbf{g}^T\mathbf{h})_{\mathbf{q}} = \mathbf{h}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{h}^T\mathbf{g}_{\mathbf{q}} + \mathbf{g}^T\mathbf{h}_{\mathbf{q}}$$

Téngase en cuenta que la que podría intuitivamente parecer como la apropiada regla del producto para la diferenciación, ni si quiera está definida, y mucho menos es válida, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{g}^T\mathbf{h}) \neq \mathbf{g}_{\mathbf{q}}^T\mathbf{h} + \mathbf{g}^T\mathbf{h}_{\mathbf{q}}$$

Si $\Phi(\mathbf{g}) = \left[\Phi_1(\mathbf{g}),\ \cdots,\ \Phi_m(\mathbf{g})\right]^T$ y $\mathbf{g}{=}\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left[g_1(\mathbf{q}),\ \cdots,\ g_m(\mathbf{q})\right]^T$

son funciones vectoriales de variables vectoriales, la regla de la cadena para la diferenciación, utilizando notación de cálculo matricial, se obtiene como:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \equiv \left[\frac{\partial \Phi_i(\mathbf{g}(\mathbf{q}))}{\partial q_j}\right]_{mxk} = \left[\sum_{l=1}^{n}(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_l}\frac{\partial g_l}{\partial q_j})\right]_{mxk} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{g}}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} = \Phi_{\mathbf{g}}\mathbf{g}_{\mathbf{q}}$$

Si **B** es una matriz constante de dimensión $m \times n$, y $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son vectores de variables de dimensiones m y n, respectivamente, un m-vector y un n-vector, se verifican las siguientes relaciones útiles:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{Bq}) = \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}^T\mathbf{Bq}) = \mathbf{q}^T\mathbf{B}^T$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}^T\mathbf{Bq}) = \mathbf{q}^T\mathbf{B}^T\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p}^T\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$$