5. MOVILIDAD en Mecanismos Planos.

El *número de grados de libertad (gdL) de un cuerpo* es el número de coordenadas independientes necesarias para especificar de forma única la posición de ese cuerpo respecto a un sistema de referencia dado.

De forma similar, diremos que el mínimo número de coordenadas necesarias para especificar de forma única las posiciones de todos los componentes de un sistema de cuerpos rígidos, será el *número de grados de libertad de ese sistema*.

Utilizaremos el concepto de *número de grados de libertad* de *tres formas* distintas pero muy relacionadas entre ellas. La primera será el número de grados de libertad de un *cuerpo* con respecto a un sistema de referencia dado, que hemos definido anteriormente. La segunda será el número de grados de libertad de un *par cinemático*. Y la tercera será el número de grados de libertad de un *mecanismo*.

Tanto por el hecho que "número de grados de libertad" es bastante largo de decir, como por el hecho que estamos utilizando este concepto de tres formas distintas, y con ánimo de clarificar, cuando tengamos que referirnos al *número de grados de libertad de un par cinemático* utilizaremos la palabra *conectividad*. Adicionalmente, este mismo término lo aplicaremos al número de grados de libertad relativos entre dos cuerpos.

De forma análoga, nos referiremos al *número de grados de libertad de un mecan*ismo utilizando el término *movilidad* de ese mecanismo. Estos términos se pueden definir formalmente de la siguiente forma: (1) Si un *par cinemático* se define entre dos cuerpos que no están conectados a ningún otro, la *conectividad* de ese par es el número de grados de libertad de movimiento de uno cualquiera de los dos cuerpos conectados con respecto al otro; (2) La *movilidad* de un *mecanismo* es el mínimo número de coordenadas necesarias para especificar las posiciones de todos los componentes del mecanismo con respecto a un determinado componente del mismo que se ha elegido como el cuerpo base o fijo.

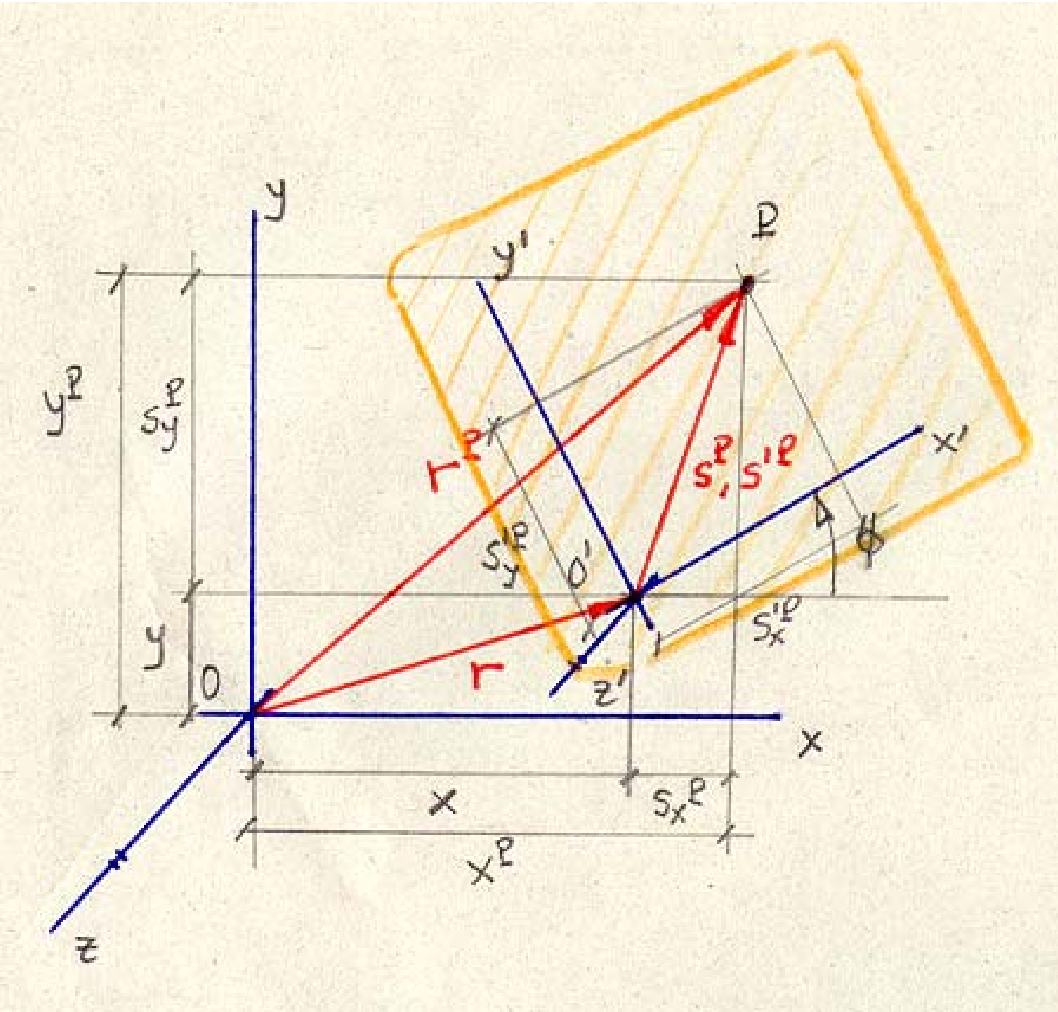

Imagen 2.68. Un cuerpo dotado de movimiento libre en el plano tiene tres grados de libertad, representados por las coordenadas X, Y, y ϕ.

La *movilidad*, o número de grados de libertad de un mecanismo, se utiliza para determinar cuántas *variables de par deben especificarse* antes de poder localizar o situar todos los puntos de todos los componentes del mecanismo como funciones del tiempo. Un *mecanismo* tiene que tener una movilidad de *valor uno o superior*. Tradicionalmente, casi todos los mecanismos tenían un grado de libertad. Sin embargo, en la práctica moderna del diseño, han empezado a utilizarse de forma habitual mecanismos con dos o más grados de libertad. Si la movilidad es cero, o es negativa, tal y como se determinara por las ecuaciones de movilidad más adelante, el ensamblaje es una estructura. Si la movilidad es *cero*, la *estructura* se denomina *estáticamente determinada*. Si la movilidad es *negativa*, la estructura es *estáticamente indeterminada*.

5.1. Calculo de la Movilidad en Mecanismos Planos.

Para poder calcular la movilidad, consideraremos en primer lugar el caso plano y a continuación extenderemos el resultado al caso espacial o tridimensional. Tal y como se indica en la Imagen 68, en el plano, un *cuerpo* que pueda moverse libremente tiene *tres* grados de libertad. Puede moverse en X, en Y, y puede girar un ángulo ϕ alrededor del eje Z.

Supongamos que en un *mecanismo* dado, existen 2 *componentes* o cuerpos rígidos. Si todos ellos tienen libertad de movimiento de forma independiente, el sistema tiene una movilidad de valor 6.

Si elegimos uno de los componentes como cuerpo base o fijo (respecto del cual se han de mover todos los demás), entonces este estará fijo con respecto al sistema de referencia base y por lo tanto habrá perdido todos sus grados de libertad. Por lo tanto, la movilidad total del sistema será 3*(N-1), siempre que no existan pares entre los componentes.

Si consideramos la existencia de un *par* con *conectividad* 1 (2 grados de libertad) entre dos cuerpos, la movilidad del sistema disminuye ya que esos *dos cuerpos* originalmente tenían *tres grados de libertad de movimiento relativo* de uno respecto del otro. Después de haber montado la citada unión o par, los dos cuerpos pasarán a tener únicamente 1 grados de libertad de movimiento relativo. Con lo que la reducción en la movilidad del sistema es $3-f_i$. Si continuamos formando uniones o pares hasta que existan P *pares*, la perdida de movilidad del sistema será

$$(3 - f_1) + (3 - f_2) + \cdots + (3 - f_i) = \sum_{i=1}^{P}(3 - f_i) = 3 * P - \sum_{i=1}^{P} f_i$$

Por lo que la movilidad total del mecanismo será

$$M = 3 * (N - P - 1) + \sum_{i=1}^{P} f_i$$

Esta ecuación recibe el nombre de *criterio de movilidad de Grouebler*. En la literatura relacionada con estos temas es posible encontrar versiones que aparentemente son diferentes de la obtenida. Todas ellas, de hecho, son equivalentes entre ellas, salvo aquellas que se refieren a un subconjunto de los casos que cubre la esa ecuación.

5.2. Existencia de Pares Múltiples.

En ciertos casos en los que *más de dos componentes* están aparentemente *conectados* mediante el mismo par aparece un problema en la aplicación de la ecuación anterior. Es típico que en algunos mecanismos tres o más componentes estén articulados juntos mediante el mismo pasador y puedan girar libremente entre ellos alrededor del eje del mismo. Esta dificultad se resuelve rápidamente cuando recordamos que un par cinemático está formado por el contacto entre ciertas superficies de *dos* cuerpos rígidos. Esta es la razón por la que muy acertadamente Reuleaux introdujo el nombre de "par" para lo que hemos llamado "conexión". Considerando el caso comentado, nos damos cuenta que *entre varios componentes conectados juntos no hay un solo par*. De hecho, si p *componentes* están conectados mediante una unión común, la conexión es equivalente a p-1 pares del mismo tipo. Si incluimos este número en el número P, y (p-1)*f en la suma de conectividades de la ecuación, aseguraremos un resultado de movilidad correcto del mecanismo utilizando la citada ecuación.

Ejemplo 1.- Grados de libertad del mecanismo básico denominado cuatro barras (4B). Determine la movilidad del mecanismo cuadrilátero articulado que aparece en la Imagen 69.

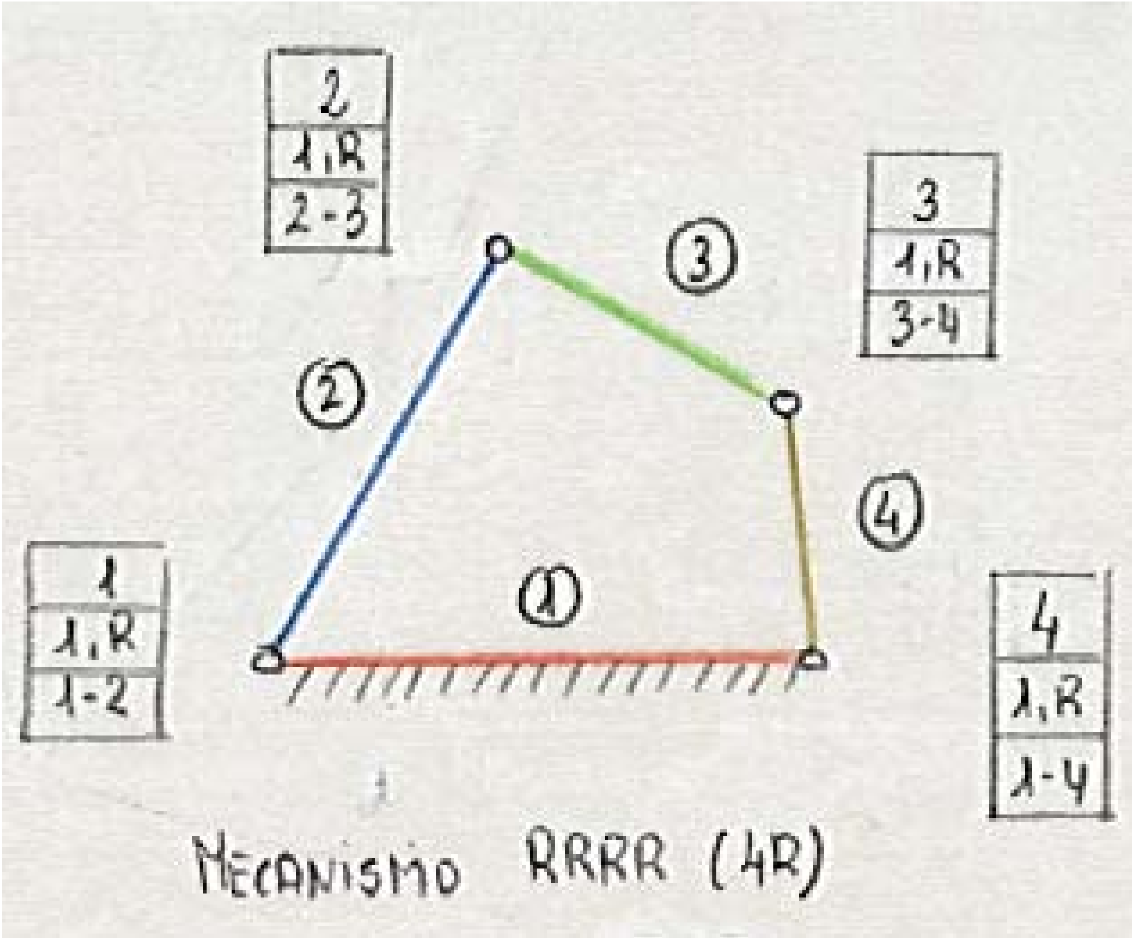

Imagen 2.69. Mecanismo Cuadrilátero Articulado.

El número de cuerpos es N = 4, el número de pares cinemáticos es P = 4, la suma de las conectividades de cada par es 4, con lo que la movilidad es M = 3*(4 – 4 - 1) + 4 = 1 gdl.

Ejemplo 2.- Grados de libertad de un mecanismo complejo. Determine la movilidad del mecanismo que aparece en la Imagen 70. Se trata de un mecanismo plano y todos sus pares tienen conectividad 1.

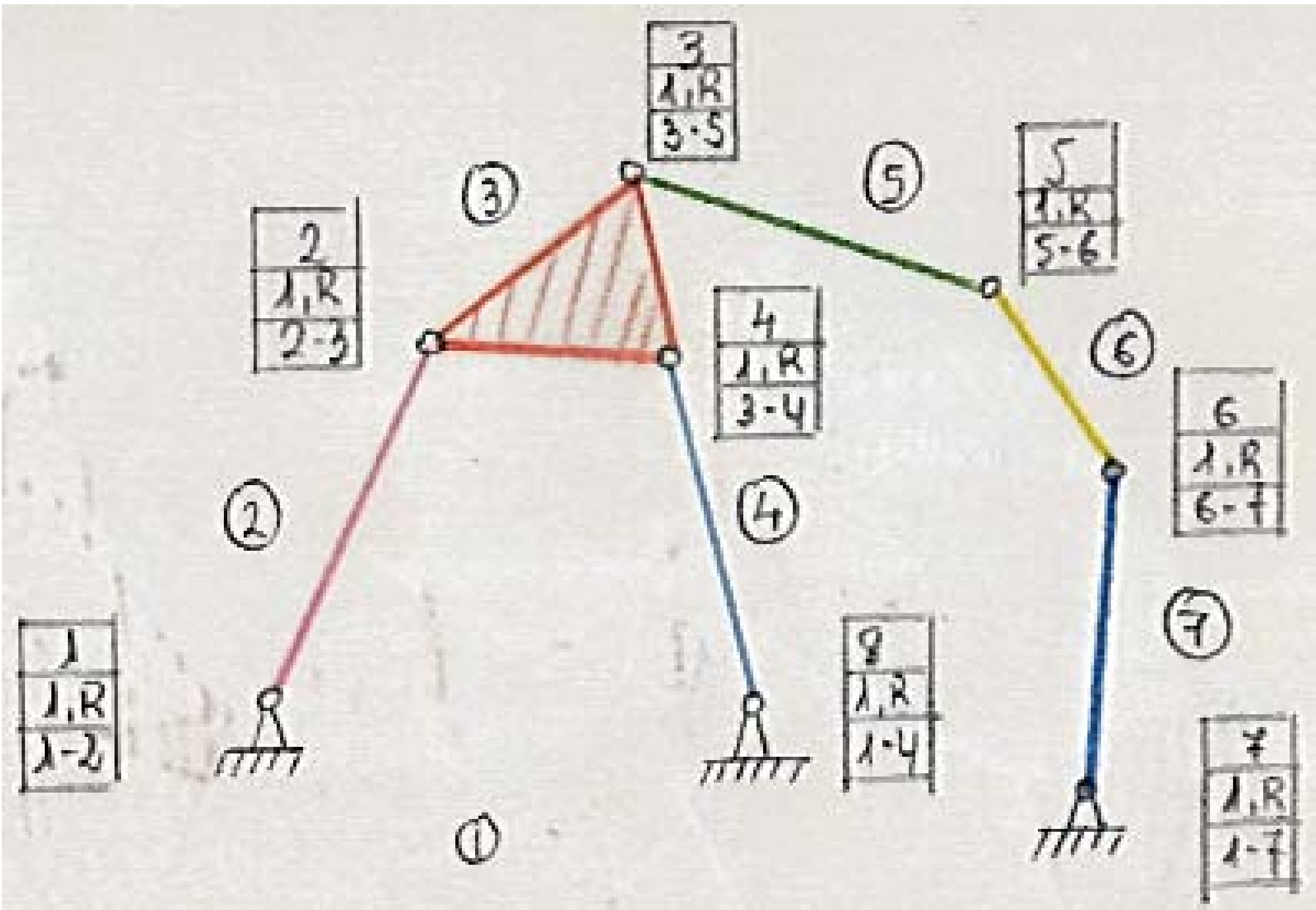

Imagen 2.70. Mecanismo con más de cuatro cuerpos, alguno de ellos ternario.

El número de cuerpos es N = 7, el número de pares cinemáticos es P = 8, la suma de las conectividades de cada par es 8, con lo que la movilidad es M = 3*(7 – 8 - 1) + 8 = 2 gdl.

Ejemplo 3.- Grados de libertad cuando hay uniones con varios pares. Determine la movilidad del mecanismo que aparece en la Imagen 71. Se trata de un mecanismo plano y todos sus pares tienen conectividad uno. Hay tres cuerpos que están conectados a un mismo eje.

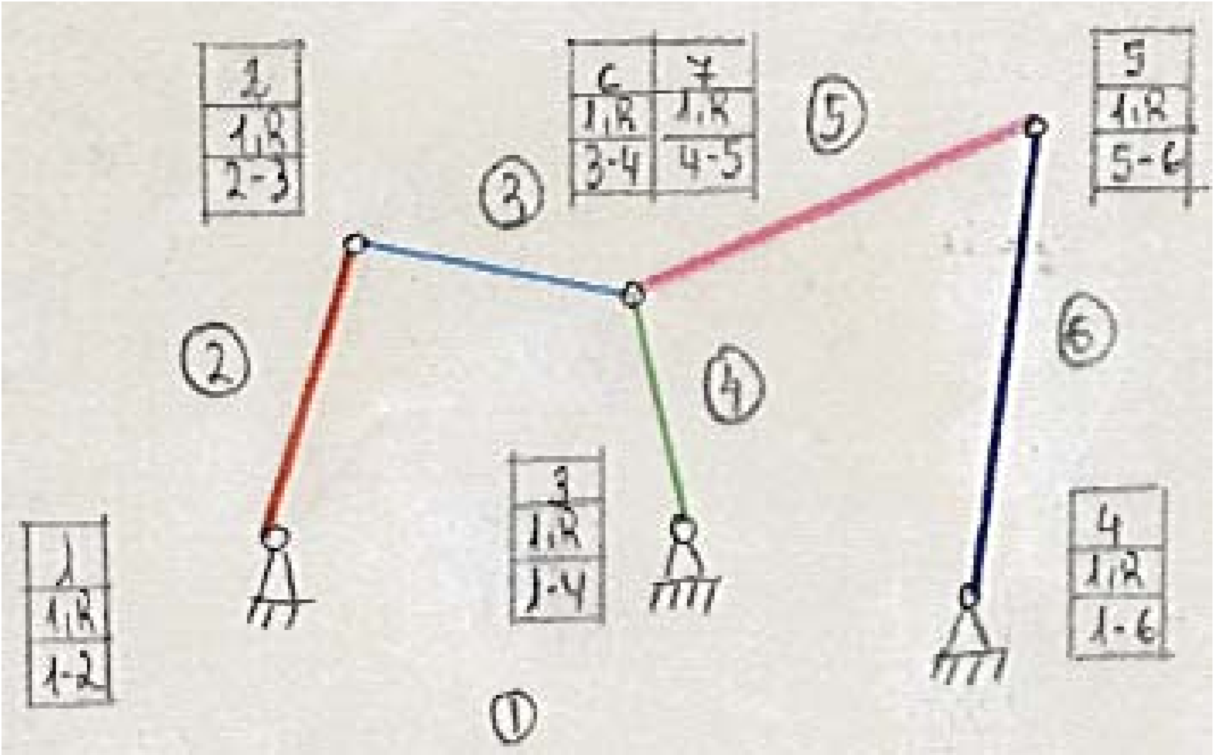

Imagen 2.71. Mecanismo con pares múltiples.

El número de cuerpos es N = 6, el número de pares cinemáticos es P = 7, la suma de las conectividades de cada par es 7, con lo que la movilidad es M = 3*(6 – 7 - 1) + 7 = 1 gdl. Como se observa en la imagen, en la conexión entre las barras 3, 4, y 5, que tiene lugar en un mismo punto o eje, se han considerado 2 pares, uno menos que el número de cuerpos conectados.

Ejemplo 4.- Grados de libertad de un mecanismo que contiene un par superior. Determine la movilidad del mecanismo que aparece en la Imagen 72. Se trata de un mecanismo plano y no todos sus pares tienen conectividad uno.

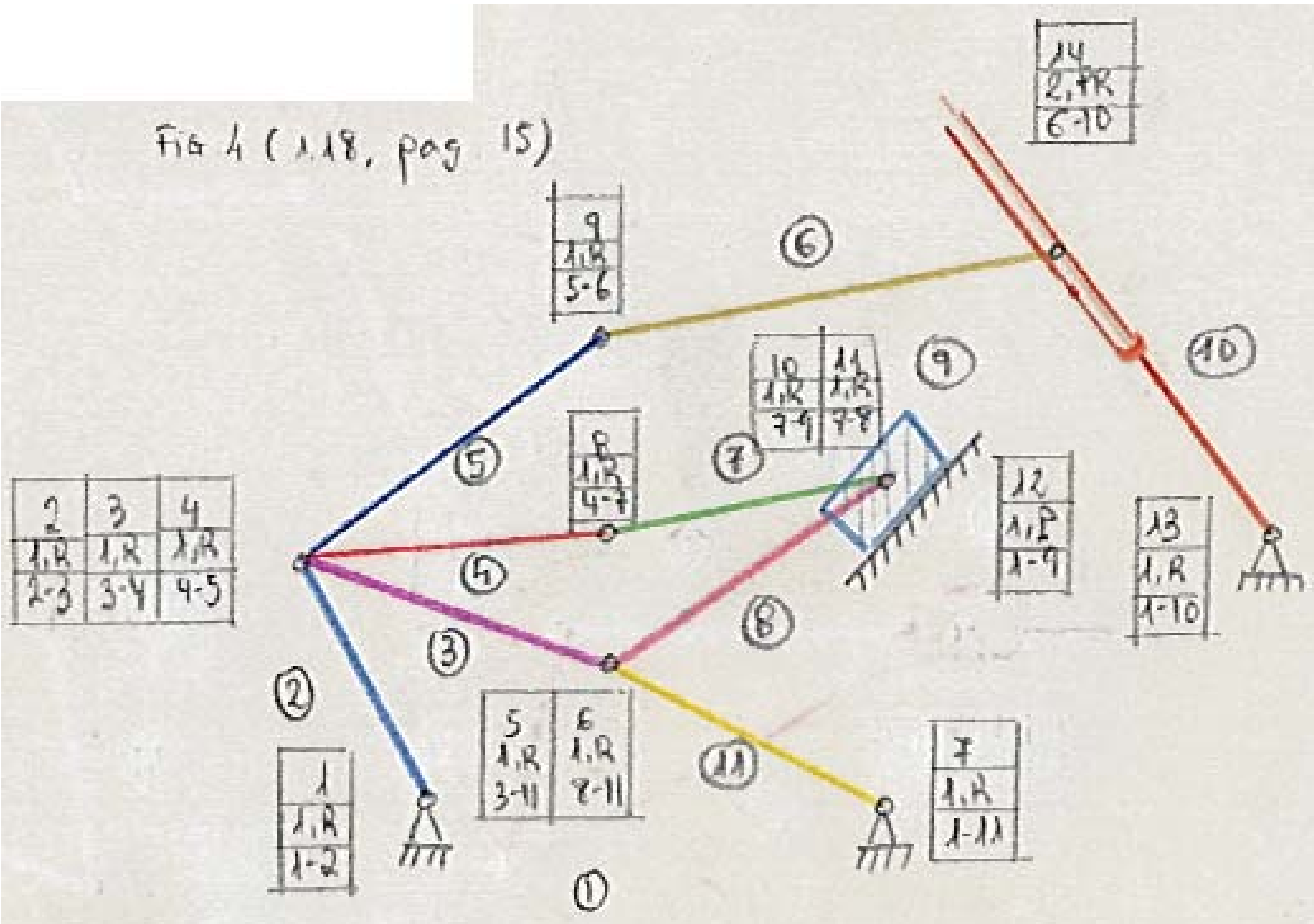

Imagen 2.72. Mecanismo con algun par superior.

El número de cuerpos es N = 11, el número de pares cinemáticos es P = 14, la suma de las conectividades de cada par es 13 * 1 + 1 * 2 = 15, con lo que la movilidad es M = 3*(11 – 14 - 1) + 15 = 3 gdl.

Esta ha sido la forma tradicional de comprobar la movilidad de los mecanismos planos que podíamos encontrar en los libros de texto sobre esta materia. Sin embargo, mediante la aplicación Mathematica es posible una comprobación mucho más elegante, utilizando la habilidad que tiene esta aplicación de generar documento CDF. Veamos cómo quedaría en la actualidad.

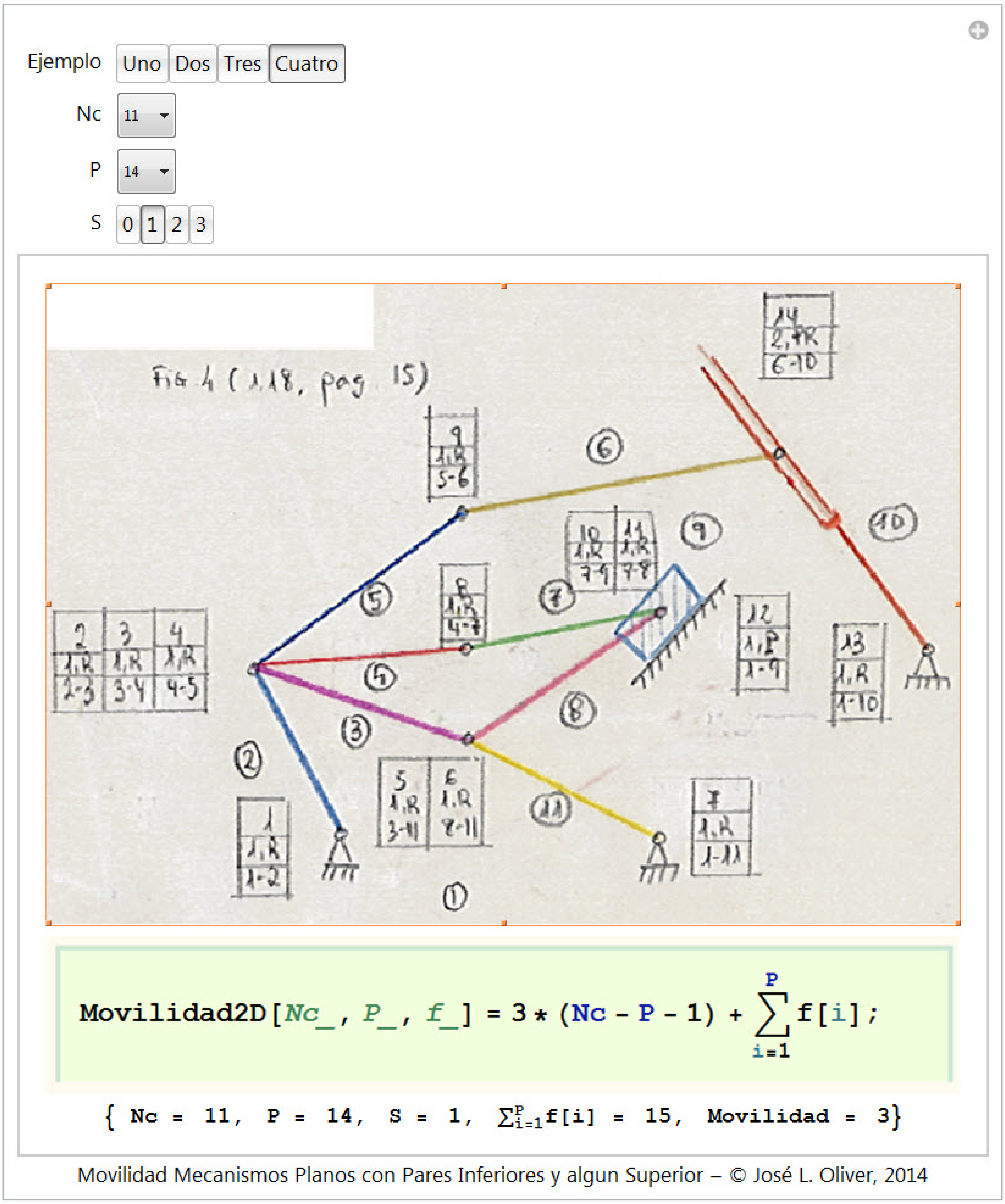

Imagen 2.73. Documento CDF que permite calcular la movilidad de los mecanismos ejemplo mediante la Formula de Gruebler 2D de forma interactiva.
http://www.upv.es/vltmodels/movilidad-planos-v2014.cdf

5.3. Mecanismos con Movilidad Uno y Pares con Conectividad Uno.

Un caso especial al que es necesario prestarle atención ocurre cuando en la Formula de Gruebler se establece la movilidad a uno y se considera que todos los pares tienen conectividad uno $f_i = 1$. En este caso, 1 = 3*(N – P - 1) + P, con lo que

$$4 = 3 * N - 2 * P$$

Y al tener que ser N y P números enteros, N debe ser par ya que tanto 2*P como 4 lo son. Esto constituye un ejemplo de una ecuación de Diofanto. Es decir una ecuación que admite únicamente como soluciones números enteros. Escribiéndola como una expresión para P en términos de N, la ecuación queda como

$$P = 3 * N/2 - 2$$

Algunas de las posibles soluciones aparecen en la siguiente Tabla. Las examinaremos seguidamente con detalle. En cada caso, los pares pueden ser o bien giratorios o bien prismáticos, ya que son los únicos tipos de pares inferiores que se pueden considerar adecuadamente formando parte de mecanismos planos.

Nº. de Solución	N	P	Nº de Configuraciones
1	2	1	1
2	4	4	1
3	6	7	2
4	8	10	16
5	10	13	230
6	12	16	6856

Imagen 2.74. Diferentes soluciones enteras de la ecuación anterior.

La SOLUCIÓN 1 es el caso trivial de dos cuerpos conectados mediante un solo par giratorio o par prismático, que podemos observar en la Imagen 75(a). En realidad, este mecanismo es muy común. Por ejemplo, una puerta, sus bisagras, y el marco de la puerta forman una cadena cinemática abierta y un mecanismo de este tipo.

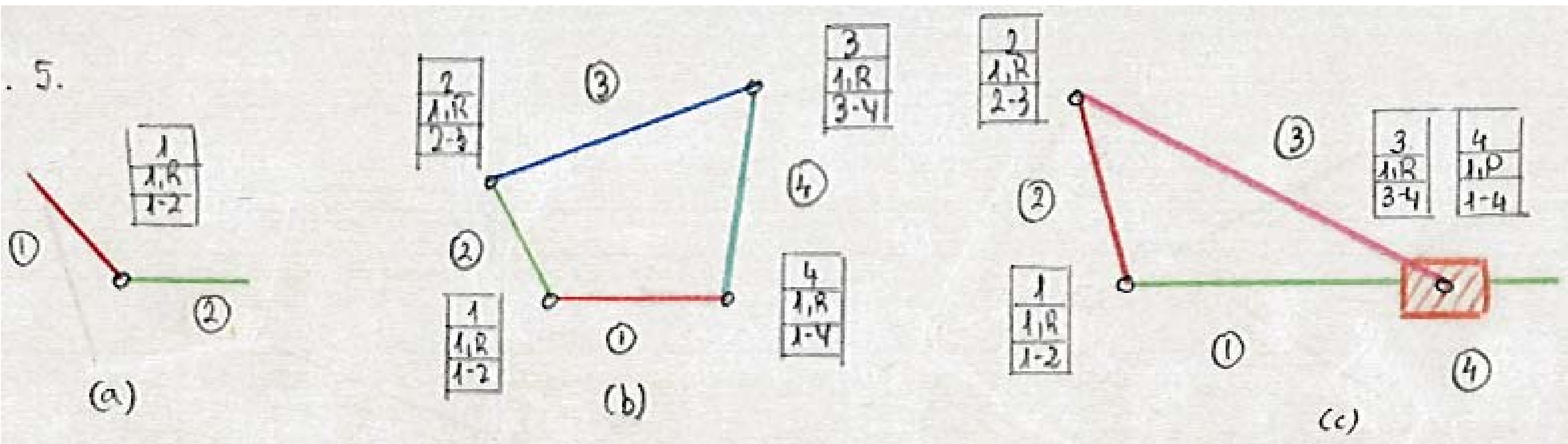

Imagen 2.75. Soluciones de la ecuación de movilidad en el plano para M = 1 cuándo N = 2 y N = 4.

La SOLUCIÓN 2 es simplemente un mecanismo de un solo lazo formando por cuatro componentes conectados mediante cuatro pares. Las dos posibles soluciones se muestran en las Imagen 75(b) y 75(c). El mecanismo que aparece en la Imagen 75(b) es el *cuadrilátero articulado* plano que es uno de los mecanismos básicos. El que aparece en la Imagen 75(c) es el *triángulo de lado variable* o *manivela – biela – deslizadera* que es junto con el anterior otro mecanismo básico, y por lo tanto ampliamente estudiados y aplicados en la práctica.

La SOLUCIÓN 3 presenta dos nuevas características. Por una parte, aparecen componentes con más de dos pares activos. Por otra parte, a pesar que únicamente se consideran pares giratorios, existen dos posibles, topológicamente distintas, configuraciones de seis componentes con siete pares. Se denominan, respectivamente, *mecanismos de Watt* y *Stephenson*, pudiéndose observar en la Imagen 76.

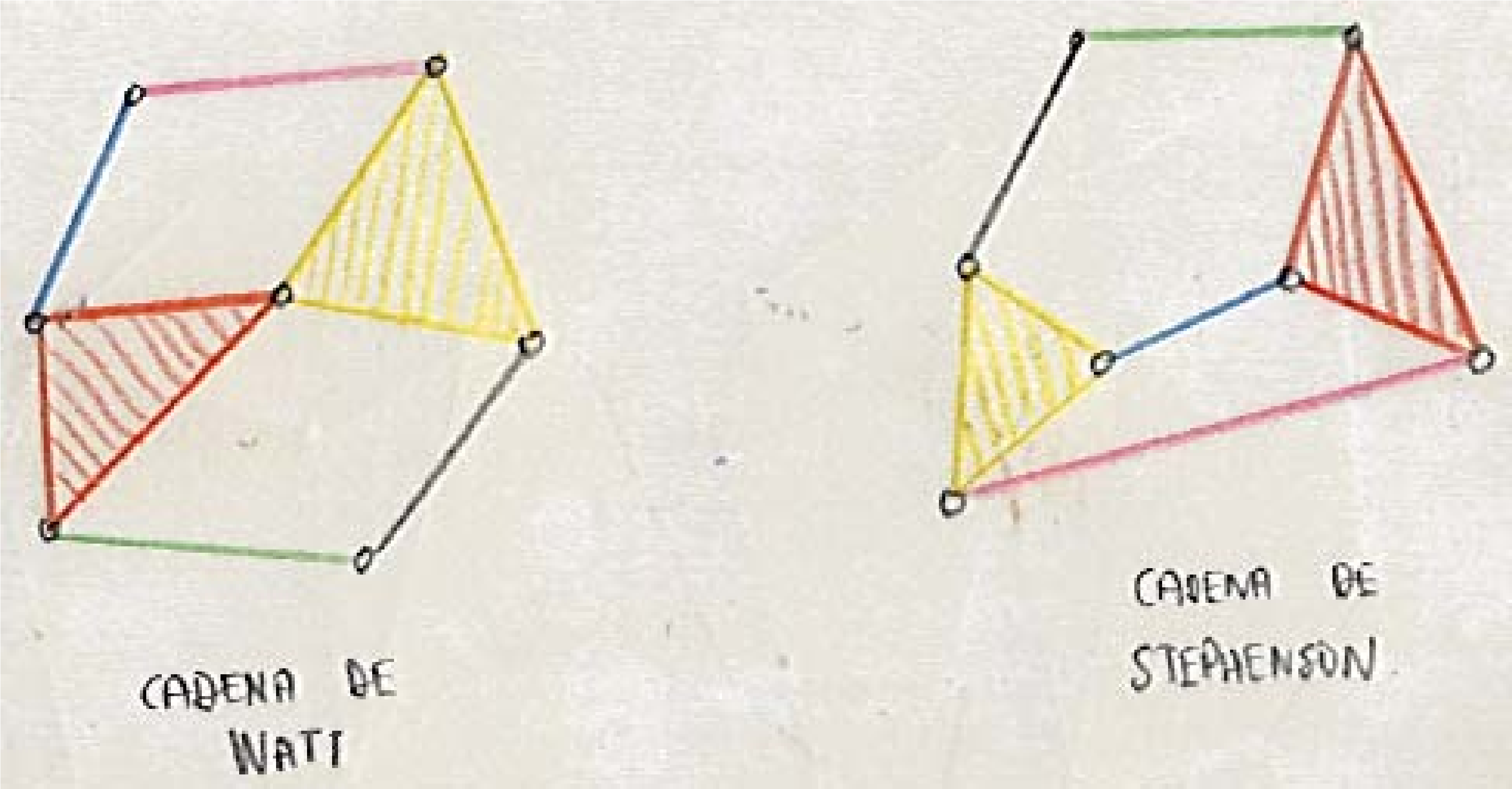

Imagen 2.76. Las dos soluciones de la ecuación de movilidad en el plano conteniendo siete pares giratorios, M = 1 y cada cadena cinemática tiene seis componentes.

La SOLUCIÓN 4 da lugar a 16 posibles configuraciones topológicamente posibles, todas ellas mostradas en la Imagen 77. La SOLUCIÓN 5 da lugar a 230 posibles configuraciones. Este número se incrementa muy rápidamente dando lugar a números de componentes elevados. Por ejemplo, la SOLUCIÓN 6 da lugar a 6856 configuraciones (Hunt, 1978).

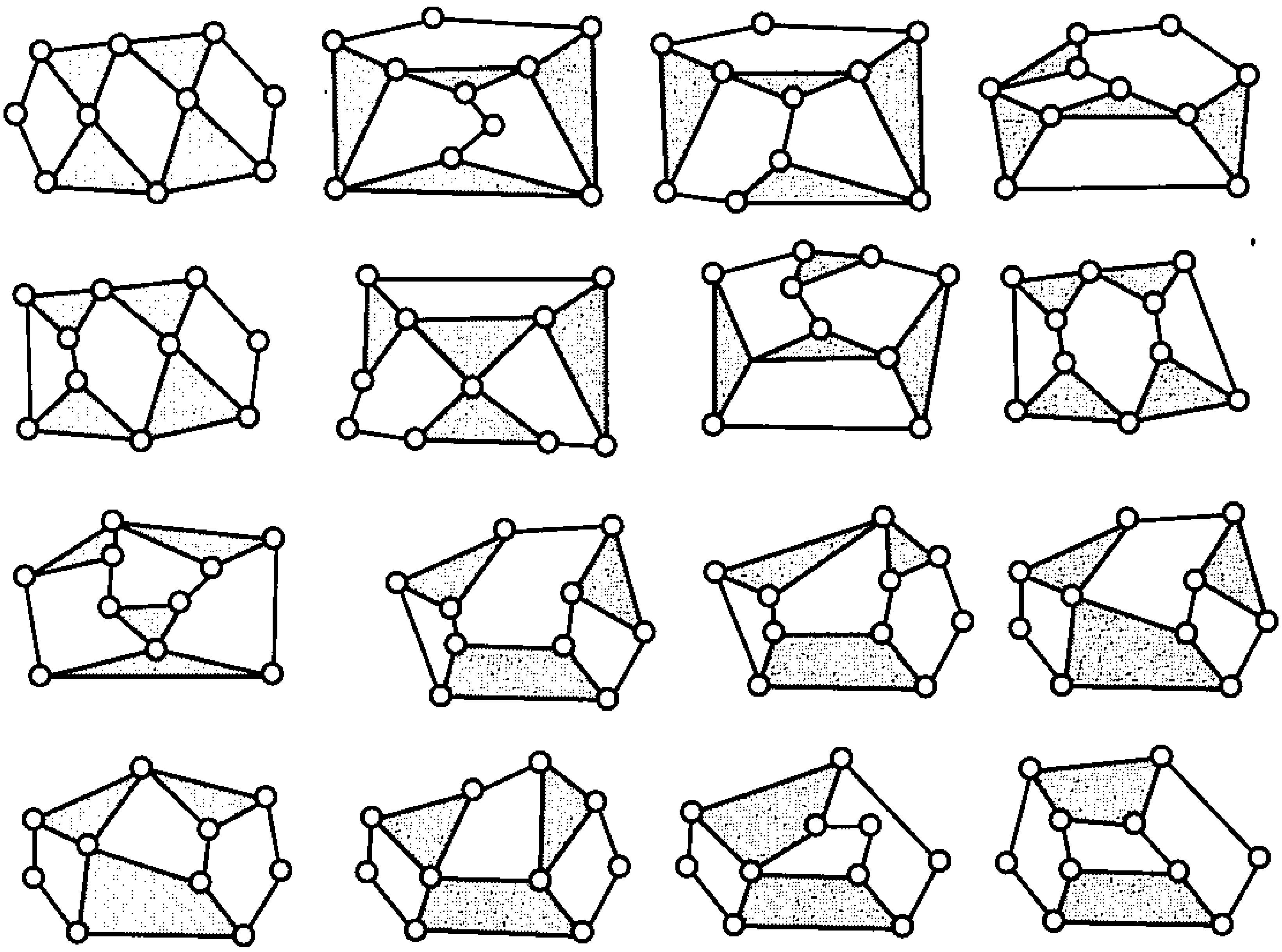

Imagen 2.77. Las 16 soluciones de la ecuación de movilidad cuando existen diez pares giratorios, M = 1 y cada cadena cinemática tiene ocho componentes.

Viendo lo anterior, no debe extrañar por qué se invierte tanto esfuerzo en el diseño de mecanismos formados por *cuatro elementos*. La configuración formada por cuatro elementos forma el mecanismo no trivial más simple posible. Además, podremos observar como la mayor parte de los requerimientos de diseño pueden conseguirse mediante mecanismos formados por cuatro o seis componentes.

Téngase en cuenta, que en el desarrollo anterior, nunca se especificó el tipo de pares a utilizar. Todo lo que se indico es que los pares debían tener conectividad uno, los mecanismos debían ser planos, y debían tener movilidad uno. Aunque los pares considerados en las Imágenes 75, 76 y 77 son todos *giratorios*, podríamos haber sustituido cualquiera de ellos por un contacto por rodadura sin deslizamiento, o por pares prismáticos. Por tanto, a pesar que solo consideremos pares inferiores, en la Imagen 78 aparecen cuatro cadenas cinemáticas que representan mecanismos SOLUCIÓN 2 formados por cuatro componentes y cuatro pares en los que aparecen combinados pares giratorios y prismáticos.

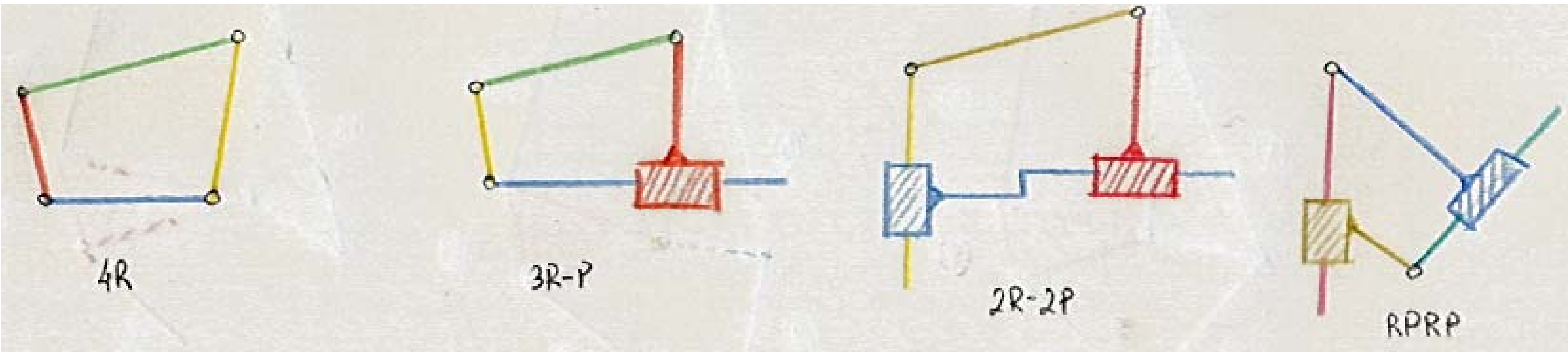

Imagen 2.78. Cuatro formas diferentes de cadenas de cuatro componentes, combinando pares giratorios y prismáticos.

El mecanismo Yugo Escocés, basado en la cadena 2R – 2P aparece representado en la siguiente imagen.

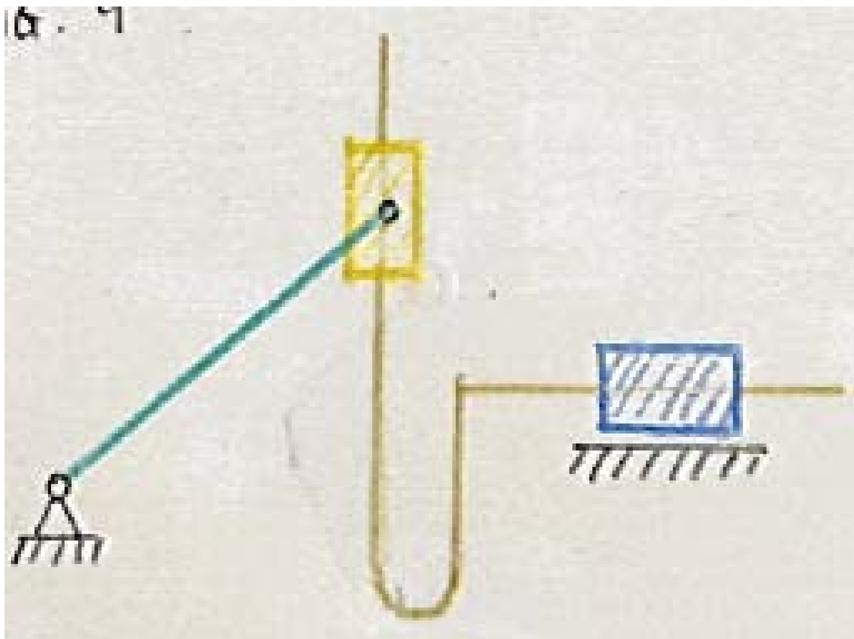

Imagen 2.79. La cadena 2R – 2P como mecanismo Yugo Escocés.