2. Engranajes.

Los trenes de engranajes son muy utilizados en todo tipo de mecanismos y máquinas. Allí donde sea necesario un cambio en la velocidad o en el par transmitido por un eje, será necesario utilizar un tren de engranajes, o una transmisión por correa, cadena, etc. En las siguientes secciones se explica la teoría cinemática de la acción del diente de engranaje, revisándose los tipos de engranajes que se utilizan en la actualidad, y se presenta la forma adecuada de calcular los factores de transmisión en trenes de engranajes simples, compuestos y planetarios.

2.1. Acción del Diente y Ley del Engrane.

En esta sección se introduce los conceptos básicos relacionados con los *engranajes cilíndricos con dientes rectos*. Se introduce los términos *rueda*, *piñón*, y *engranajes internos*. Se calcula *la relación de velocidades* media entre un par de engranajes cilíndricos de dientes rectos en función de sus números de dientes. Se indican las razones por las que esa relación de velocidades debe ser constante, no sólo por término medio sino también en cada instante. Se demuestra la condición geométrica que deben satisfacer los perfiles de los dientes con el fin de conseguir una relación de velocidades constante en todo momento, lo que se denomina *Ley Fundamental del Engrane*, y se introduce el concepto *de perfiles conjugados*. Se indica que dado el perfil de un diente es posible matemáticamente encontrar su conjugado, pero que el perfil más comúnmente empleado es el denominado *perfil de evolvente*, salvo en los relojes en los que se utiliza el *cicloidal*. A continuación se comentan las características geométricas de la curva evolvente, introduciéndose los conceptos de *curva evolvente*, ángulo de presión, *ángulo del flanco*, y *espesor del diente* a una determinada profundidad

Imagen 2.101. Par de engranajes en acción.

2.1.1. Relación de Velocidades.

La relación de velocidades (factor de transmisión) es uno de los conceptos más importantes cuando se habla de engranajes. Es la relación entre las velocidades de rueda y piñón, y es importante que esa relación sea constante, no solo por término medio, sino instantáneamente. En el siguiente ejemplo, la relación de velocidades será constante sólo por término medio.

RELACIÓN DE VELOCIDADES NO CONSTANTE

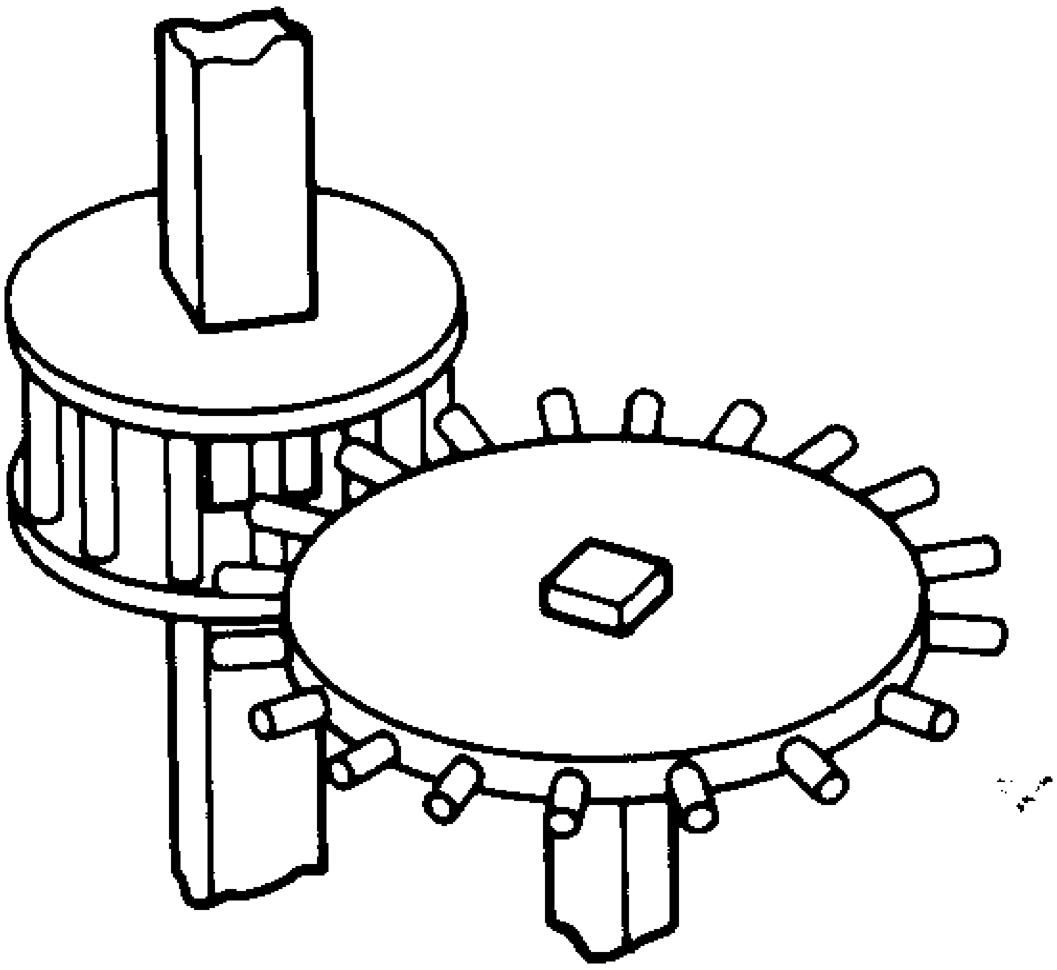
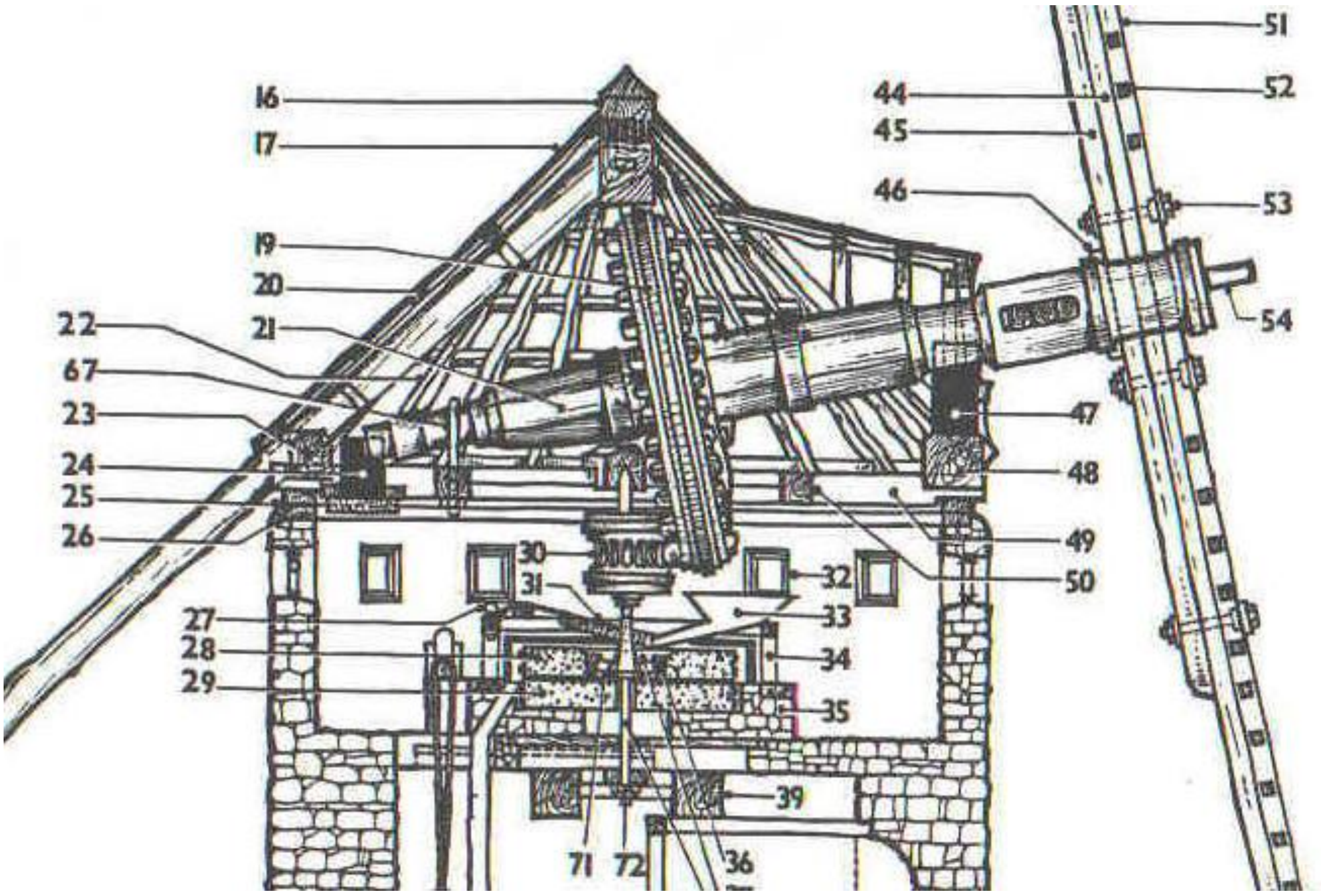


Imagen 2.102. Engranaje de radios engranando con su linterna.

La Imagen 2 muestra un antiguo par de engranajes en contacto. Uno de ellos consiste en M1 pasadores radiales de espesor uniforme que están igualmente espaciados sobre el perímetro de la circunferencia. Se le denomina engranaje de radios. Los dientes del segundo consisten en M2 pasadores circulares espaciados uniformemente entre dos discos, cada uno de ellos con su eje perpendicular a los discos, y paralelo a su eje de rotación. Se le denomina engranaje de linterna. Estos engranajes se utilizaban en la época medieval en Europa en la construcción de molinos para cereales y formando parte de las máquinas de guerra de entonces.


16
17
19
20
21
22
67
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
39
71
72
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54

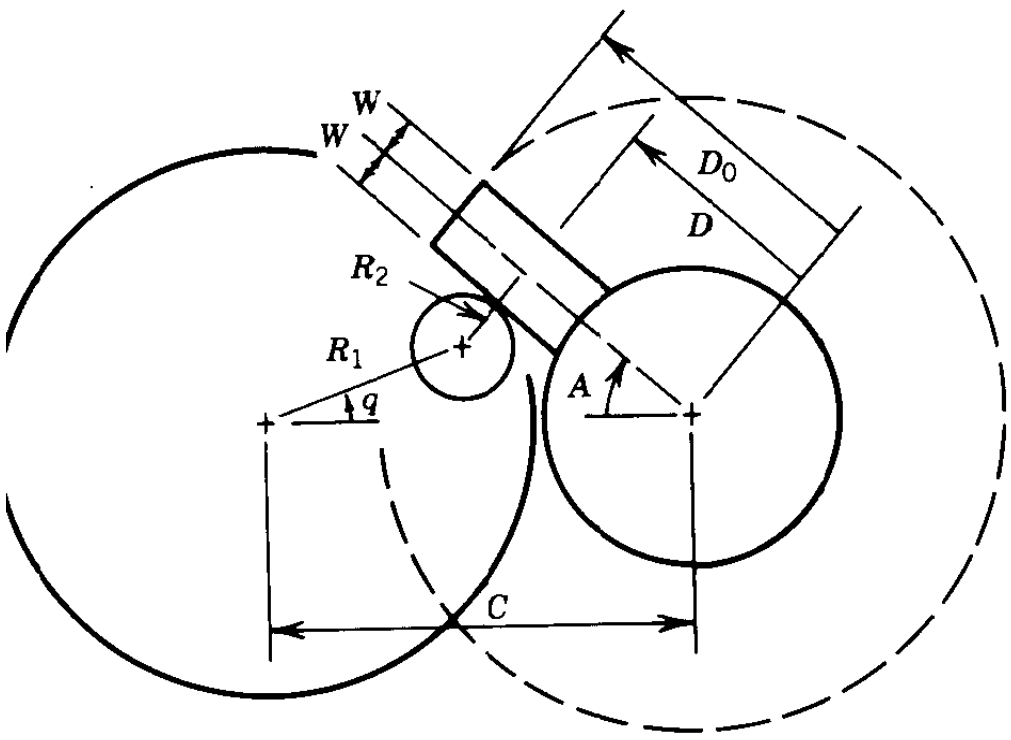


Imagen 2.103. Diagrama cinemático.

Ecuaciones de posición para el lazo:

$$\begin{aligned} &R_1 \cos q + (R_2 + W)\,\mathrm{sen}A + D\cos A - C = 0 \\ &R_1 \mathrm{sen}q + (R_2 + W)\cos A - D\,\mathrm{sen}A = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Estas relaciones son válidas sobre el intervalo q1 y q2, correspondiente a A1 y A2. Se suponen conocidas las dimensiones R1, R2, W, Do, y C, con lo que estas ecuaciones se pueden resolver y obtener A y D en función de q.

Por diferenciación de esas ecuaciones es posible obtener las ecuaciones de velocidad para el lazo, de las que se pueden obtener los coeficientes de velocidad Ka y Kd. En la Imagen 3 se presentan los valores de la coordenada secundaria A y su correspondiente coeficiente de velocidad Ka, durante el periodo de contacto entre los pasadores de los engranajes. Por lo tanto representa para un ciclo ambas variables. Es evidente que Ka, el coeficiente de velocidad correspondiente a la coordenada secundaria A, no es constante, sino que varía con la posición. Esto indica que la relación entre la velocidad del engranaje de radios (seguidor) y el de linterna (impulsor), no es constante. Si la velocidad de entrada es constante, la de salida variará periódicamente. Se podría demostrar que la velocidad angular media en la salida (engranaje de radios), es decir considerada para una vuelta completa, es constante, aunque no lo sean sus valores instantáneos.

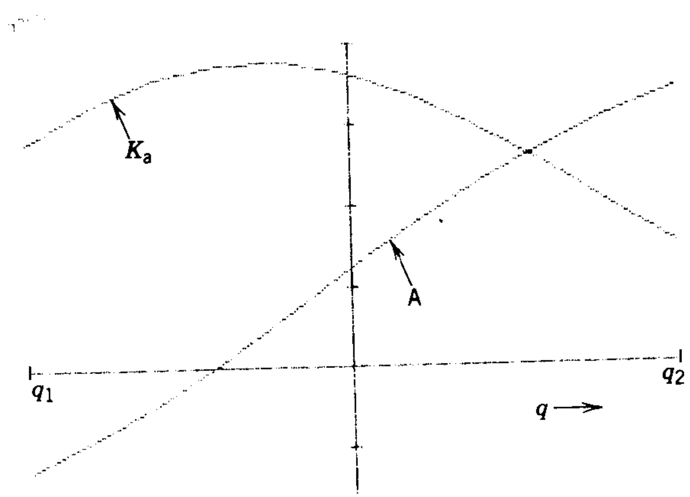


Imagen 2.104. Representación gráfica coordenada secundaria A y de su correspondiente coeficiente de velocidad.

El que la relación entre las velocidades no sea constante, supone la aparición de vibraciones en el eje de salida, lo que hace que se genere ruido, daños por fatiga. Para maquinaria que funcione a baja velocidad esta situación es tolerable, no siéndolo para las máquinas actuales, que por razones diversas deben funcionar a altas velocidades.

RELACIÓN DE VELOCIDADES CONSTANTE

Es importante encontrar las condiciones bajo las que se obtendrá una relación de velocidades constante. En la Imagen 4, tenemos dos levas en contacto, que representan los dos dientes en contacto en un par de engranajes. Las dos levas giran alrededor de los puntos C1 y C2, separados una distancia C. Las velocidades angulares de ambas son C1 y C2, en los sentidos indicados. En el punto de contacto, punto H, a la línea tangente la denominamos B1-B2, y a la normal N1-N2. A la línea normal se la denomina "línea de acción" o "línea de contacto". La leva de la izquierda es la conductora, y la de la derecha la conducida. Las superficies en contacto nunca se deben separar. Matemáticamente esto se expresa introduciendo la condición que las componentes de las velocidades a lo largo de la línea de contacto sean iguales en los dos puntos en contacto. En la figura se representan los vectores velocidad de los puntos en contacto, V1 y V2. Estos vectores serán perpendiculares a la línea que los une con los ejes de rotación de las levas.

Teniendo en cuenta que la suposición de cuerpo rígido requiere que, trazada una línea en dicho cuerpo, las proyecciones de los vectores velocidad de todos los puntos de esa línea en la dirección definida por ella sean iguales, podremos escribir las siguientes expresiones para las componentes de las velocidades V1 y V2 en la dirección definida por la línea de acción:

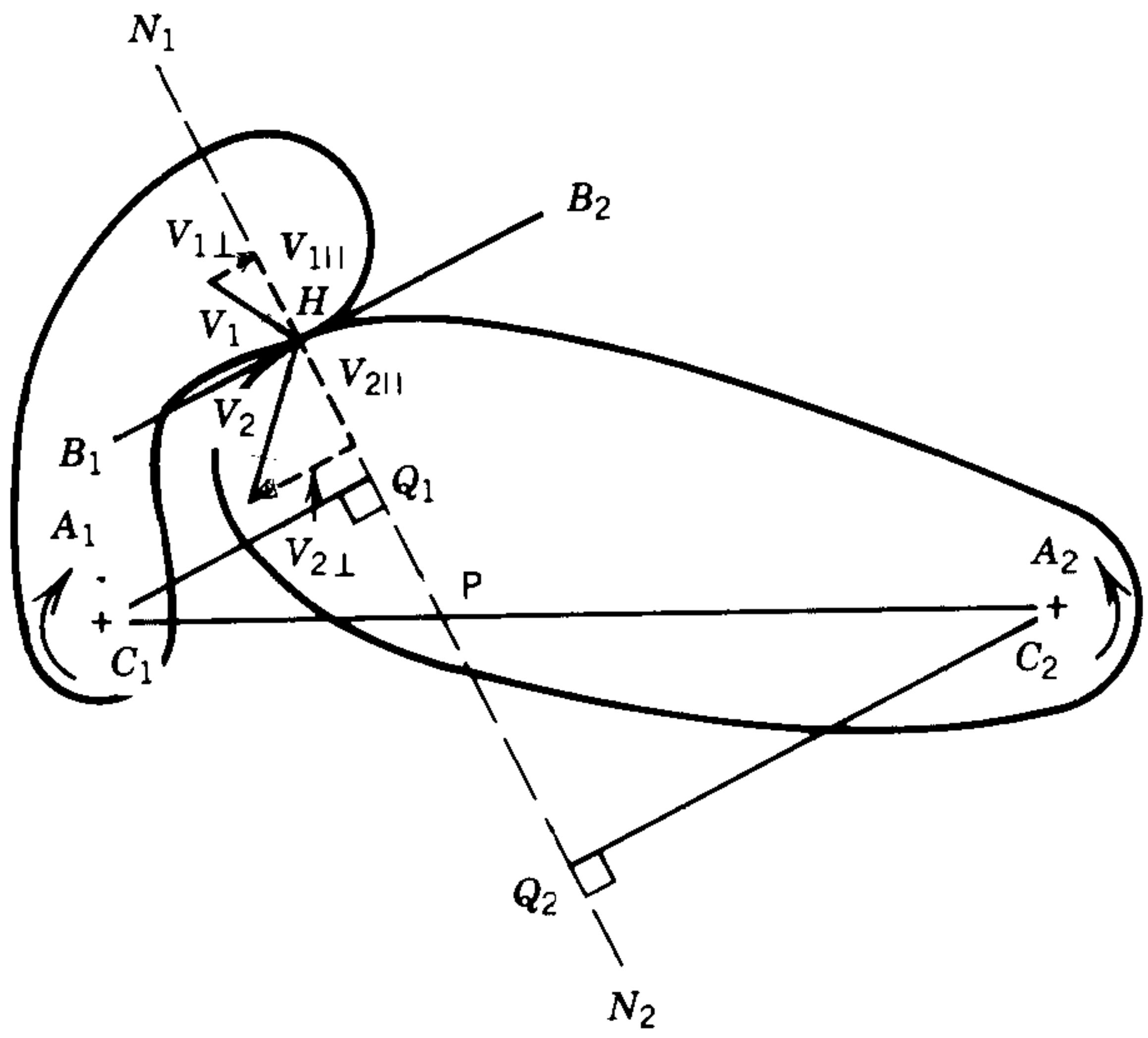


Imagen 2.105. Representación mediante levas del contacto entre dos dientes.

$$
\begin{aligned}
V_{1||} &= \dot{A}_1 \; C_1Q_1 \\
V_{2||} &= \dot{A}_2 \; C_2Q_2
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Pero para mantener el contacto permanentemente, ambas componentes han de ser iguales. Igualándolas se obtiene la siguiente relación entre las velocidades angulares de las dos levas.

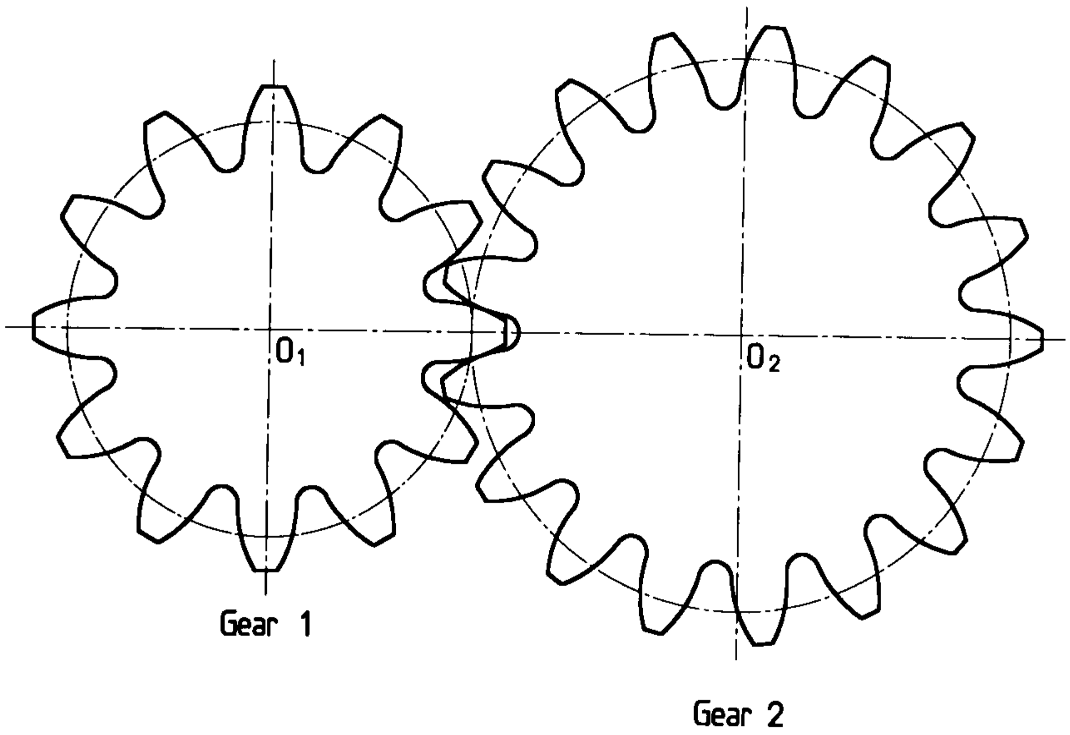
$$
\frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1} = \frac{C_1Q_1}{C_2Q_2} \qquad (3)
$$

La intersección de la línea de centros con la línea de contacto define el llamado punto primitivo. Los triángulos C1Q1P y C2Q2P son geométricamente similares. Con lo que se puede escribir esta otra relación:

$$\frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1} = \frac{C_1P}{C_2P} \qquad (4)$$

Ya estamos en situación de formular cual será la condición que hará que la relación de velocidades sea constante. Para que esa relación sea constante la relación entre las distancias C1P y C2P debe ser constante, lo que es equivalente a decir que el punto P debe dividir a la distancia entre centros en la misma relación. A esta condición de se la *denomina "Ley Fundamental del Engrane*": Para obtener una relación de velocidades angulares constante, la localización del punto primitivo debe ser constante.

2.1.2. Perfiles Conjugados.



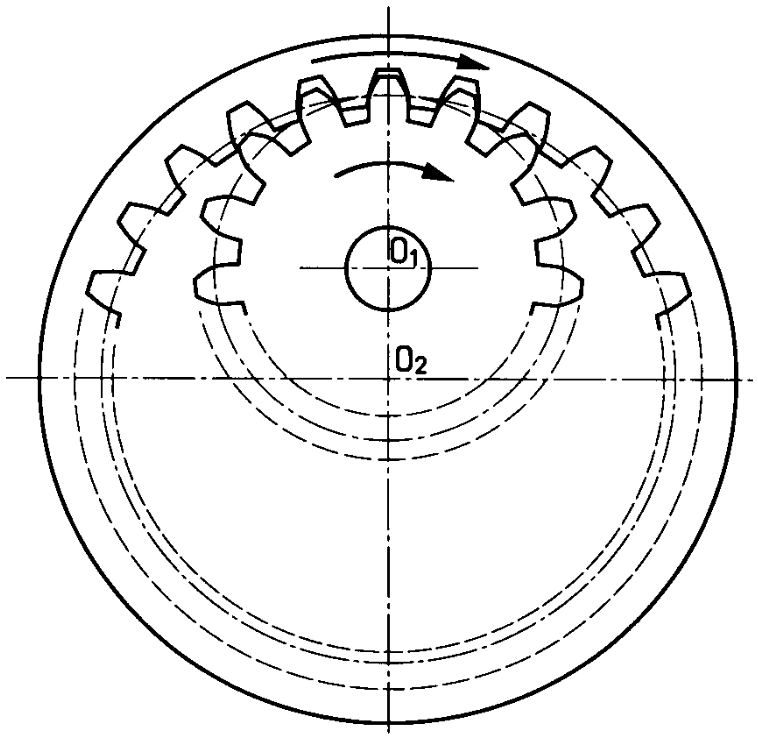


Imagen 2.106. Perfiles conjugados típicos.

Ya se ha establecido que la condición de relación de velocidades constante viene impuesta por el hecho que el punto primitivo deba permanecer estacionario durante el movimiento. Esa posición viene determinada por los perfiles de los dientes de los engranajes en los puntos de contacto. Para que el punto primitivo permanezca estacionario, la normal en el punto de contacto (la línea de acción) debe continuar intersectando a la línea de centros en la misma posición, a pesar de que el punto de contacto varíe a medida que los dientes van engranando. Se denominan perfiles conjugados (uno del otro) a aquellos perfiles que definidos para los dientes de dos engranajes en contacto hacen que el punto primitivo se mantenga estacionario. Por lo tanto, los dientes con perfiles conjugados satisfarán la ley del engrane, y los engranajes que tengan dientes con perfiles conjugados tendrán una relación de velocidades constante.

Téngase en cuenta que la propiedad de ser conjugado (o no conjugado) es una propiedad para un par de dientes de engranajes, y no una propiedad de cada diente de forma individual. En principio, dada cualquier forma para el perfil del primer diente, es posible determinar la forma del segundo diente de tal forma que sean conjugados. Esto podría sugerir que se utilizarán una gran cantidad de perfiles para los dientes de los engranajes. La realidad es que la mayor parte de los engranajes utilizan perfiles que se denominan de evolvente. La única excepción la constituyen los perfiles denominados cicloidales, que se utilizan en los mecanismos de relojería. Por esta razón, la discusión que sigue se centrará a la cinemática del perfil de diente en evolvente. Pero antes de continuar es necesario comentar algunas propiedades del perfil de evolvente.

2.1.3. Propiedades del Perfil de Evolvente.

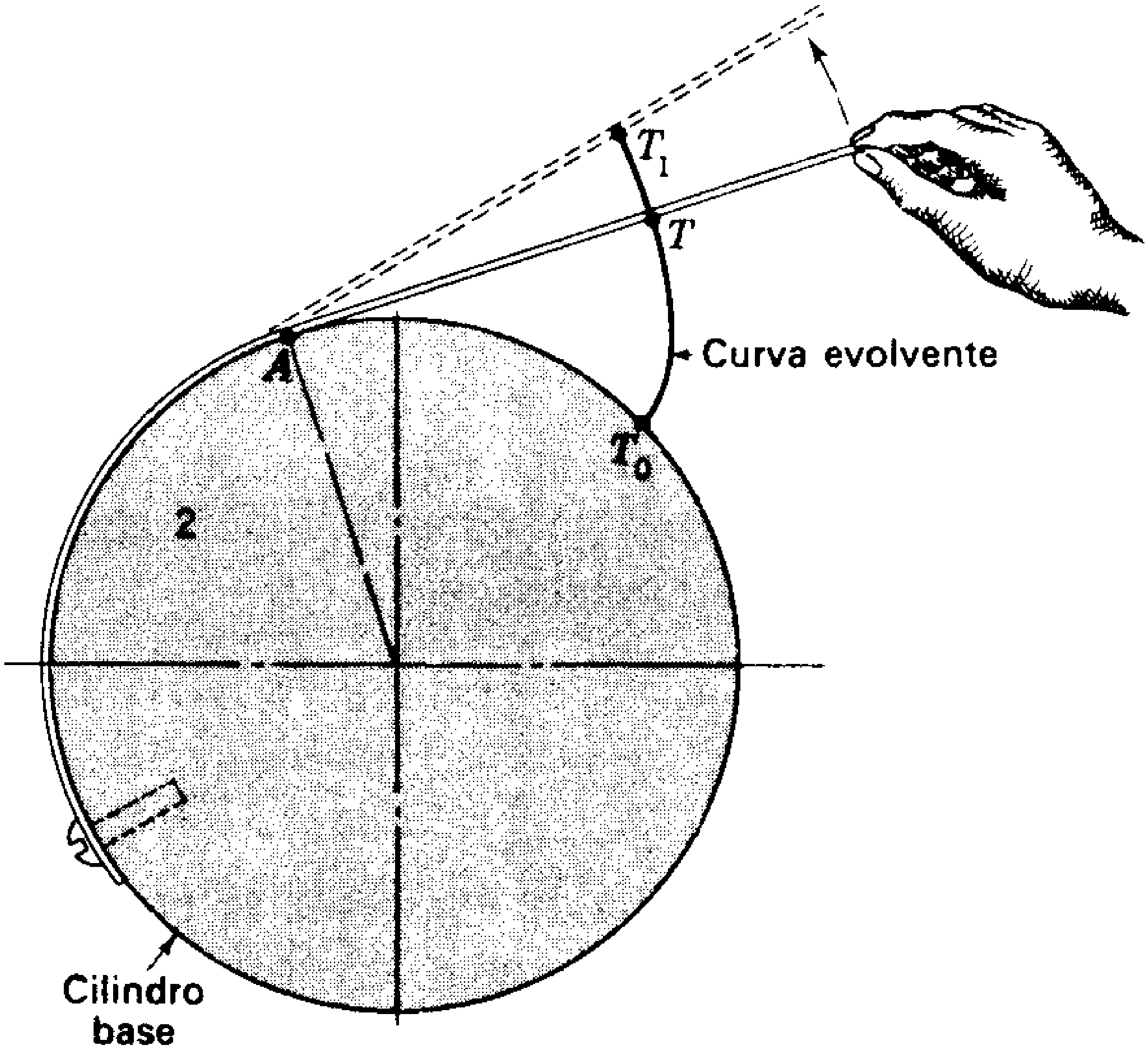


Imagen 2.107. Generación de la curva evolvente.

La evolvente de un círculo es la trayectoria trazada por la punta de una cuerda tirante desenrollada de un cuerpo circular.

En la Imagen 6b se considera a la cuerda enrollada inicialmente alrededor de un círculo, denominado círculo base, con el extremo final libre situado en la intersección del círculo base con el eje vertical. Esta cuerda es inextensible y debe permanecer tensa, de tal forma que el movimiento inicial debe ser perpendicular al círculo en la dirección de escape. A medida que más cuerda se desenrolla, la trayectoria trazada por el extremo libre se curva hacia la derecha como se muestra.

En esta figura se muestra la situación cuando la cuerda se ha desenrollado desde un arco de $\pi / 4$ rad. La línea de trazos en la parte superior de la figura indica la continuación de la curva evolvente. La longitud de la parte recta de la cuerda es P, que es el radio de curvatura instantáneo de la evolvente. El radio del cilindro sobre el que estaba inicialmente enrollada la cuerda es Rb, denominado radio base. Las coordenadas polares del extremo de la cuerda son (R, B), el radio y el ángulo polar del punto de la curva evolvente. El ángulo polar del punto donde la cuerda es tangente al círculo base es la suma de los ángulos, B + Af, donde al segundo ángulo, Af, se le denomina ángulo del flanco. Nótese que el ángulo del flanco se identifica por segunda vez en la figura, como el ángulo que forma la tangente en un punto a la evolvente y la radial que pasa por ese punto.

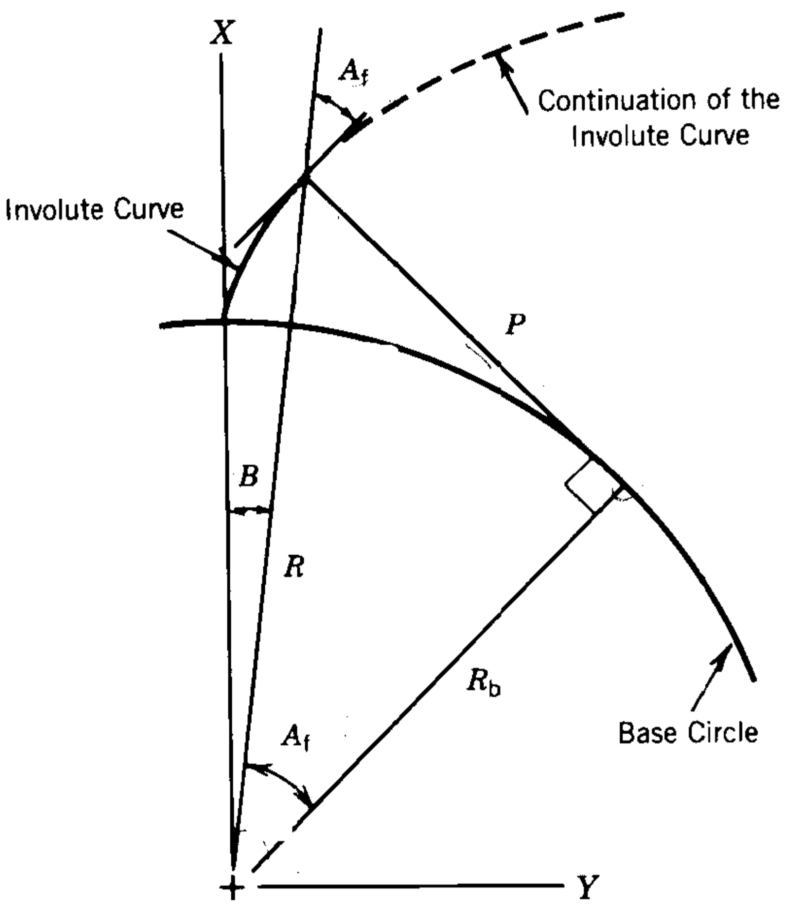


Imagen 2.108. Geometría de la curva evolvente.

El radio de curvatura P, se puede expresar de dos formas, una en función de la longitud del arco, y otra utilizando la trigonometría del triángulo rectángulo:

$$P = R_b \left(B + A_f\right) = R_b tgA_f \tag{6}$$

Si se elimina P entre esas dos expresiones, se puede despejar B. Donde la función evolvente, inv(X), se define como tan(X) - X:

$$B = tgA_f - A_f = evol(A_f) \tag{7}$$

Otra relación importante obtenida del triángulo rectángulo es la que expresa el radio de la evolvente en función del ángulo del flanco:

$$R = \frac{R_b}{\cos A_f} \tag{8}$$

Las dos expresiones anteriores proporcionan las coordenadas polares de cualquier punto de la curva evolvente, R y B, en función del parámetro Af, el ángulo del flanco. Si se especifica un punto de la evolvente, bien dando el radio R o el ángulo polar B, una de esas relaciones se podría utilizar para obtener Af, el correspondiente ángulo del flanco. Para un valor dado de R, la determinación del ángulo del flanco es directa; en cambio, si se da un valor para B, la determinación de Af es más costosa al ser la ecuación a resolver algebraica no lineal. Será necesario utilizar Newton-Raphson para resolver la siguiente ecuación no lineal:

$$tgA_f - A_f - B = 0 \tag{9}$$

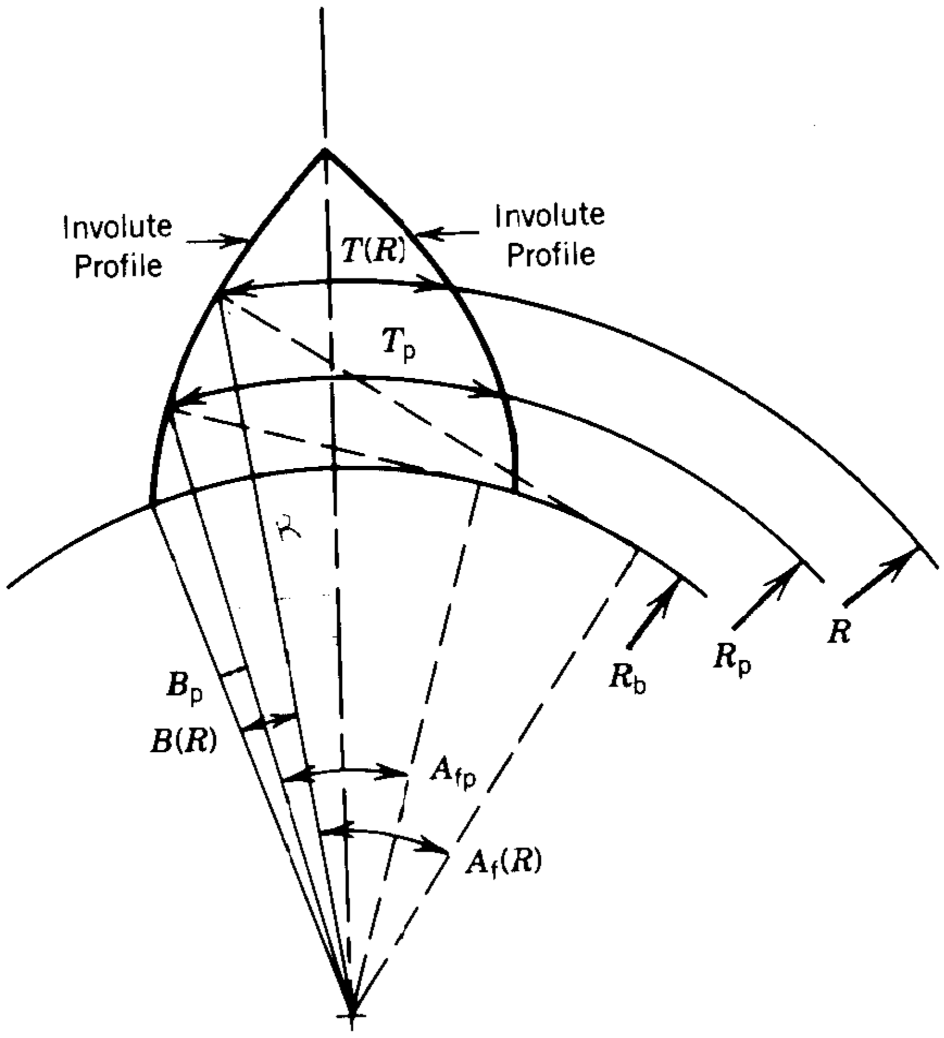


Imagen 2.109. Geometría del diente con perfil de evolvente

Cuando se utiliza el perfil de evolvente en un diente de engranaje, se emplean dos curvas evolventes, como se muestra en la Imagen 7. Se denomina espesor circular a la longitud de arco de circunferencia entre las dos curvas evolventes.

A veces es interesante determinar el espesor circular del diente a un determinado radio, dado el espesor circular a otro radio. Consideremos Rb, Rp, Tp, y R conocidos, con el espesor circular a R, denotado por T(R), a determinar. El ángulo del flanco a R es Af(R), y se puede obtener a partir de la siguiente relación:

$$A_f\left(R\right) = \mathrm{ar}\cos\left(\frac{R_b}{R}\right) \qquad (10)$$

Conocido Af(R), podemos calcular la función evolvente. De forma similar determinaríamos el ángulo del flanco a Rp, y la función evolvente correspondiente:

$$\mathrm{evol}\left[A_f\left(R\right)\right] = \mathrm{tg}\left[A_f\left(R\right)\right] - A_f\left(R\right) \qquad (11)$$

Planteando la diferencia entre los ángulos subtendidos por T(R)/2 y Tp/2, obtenemos esta expresión:

$$\frac{T_p}{2R_p} - \frac{T\left(R\right)}{2R} = B\left(R\right) - B_p \qquad (12)$$

Expresión de la que podemos despejar el espesor circular deseado T(R). Para calcular el radio para el que el espesor circular tiene un determinado valor, T(R), será necesario utilizar el algoritmo de Newton-Raphson:

$$T(R) = 2R\left\{\frac{T}{2R_p} + \mathrm{evol}\left(A_{fp}\right) - \mathrm{evol}\left[A_f\left(R\right)\right]\right\} \qquad (13)$$

2.2. Engranajes Cilíndricos con Dientes Rectos con Perfil de Evolvente.

En esta sección se analizan los engranajes cilíndricos con dientes rectos con *perfil de evolvente*. Para demostrar que los dientes con perfil de evolvente verifican la Ley Fundamental del Engrane se recurre al ejemplo típico de los dos cilindros unidos por una cinta inextensible cruzada, introduciéndose los conceptos de *circulo base, circulo primitivo,* y *ángulo de presión*. Seguidamente se revisa la nomenclatura asociada con este tipo de engranajes, introduciéndose los conceptos de *addendum, dedendum, longitud de la línea de contacto, arcos de acción, relación de contacto, espesor circular, cara* y *flanco* de un diente, *espacio libre de fondo, profundidad de trabajo,* y *juego*. A continuación, se comentar las ventajas que posee el diente con perfil de evolvente que hacen que sea el más utilizado en la práctica en los engranajes: (1) la línea de acción permanece fija, con lo que se reduce la carga dinámica sobre los ejes; (2) la acción conjugada de un par de engranajes no es afectada por el cambio en la distancia entre ejes; y (3), quizás la más importante, que es posible tallarlos utilizando como herramienta un perfil conjugado. Por último se introducen los conceptos de *círculo primitivo, línea de acción, paso circular, paso diametral* y *módulo,* indicándose que este último es lo que caracteriza por completo del tamaño del diente.

2.2.1. Diente de Engranaje con Perfil de Evolvente.

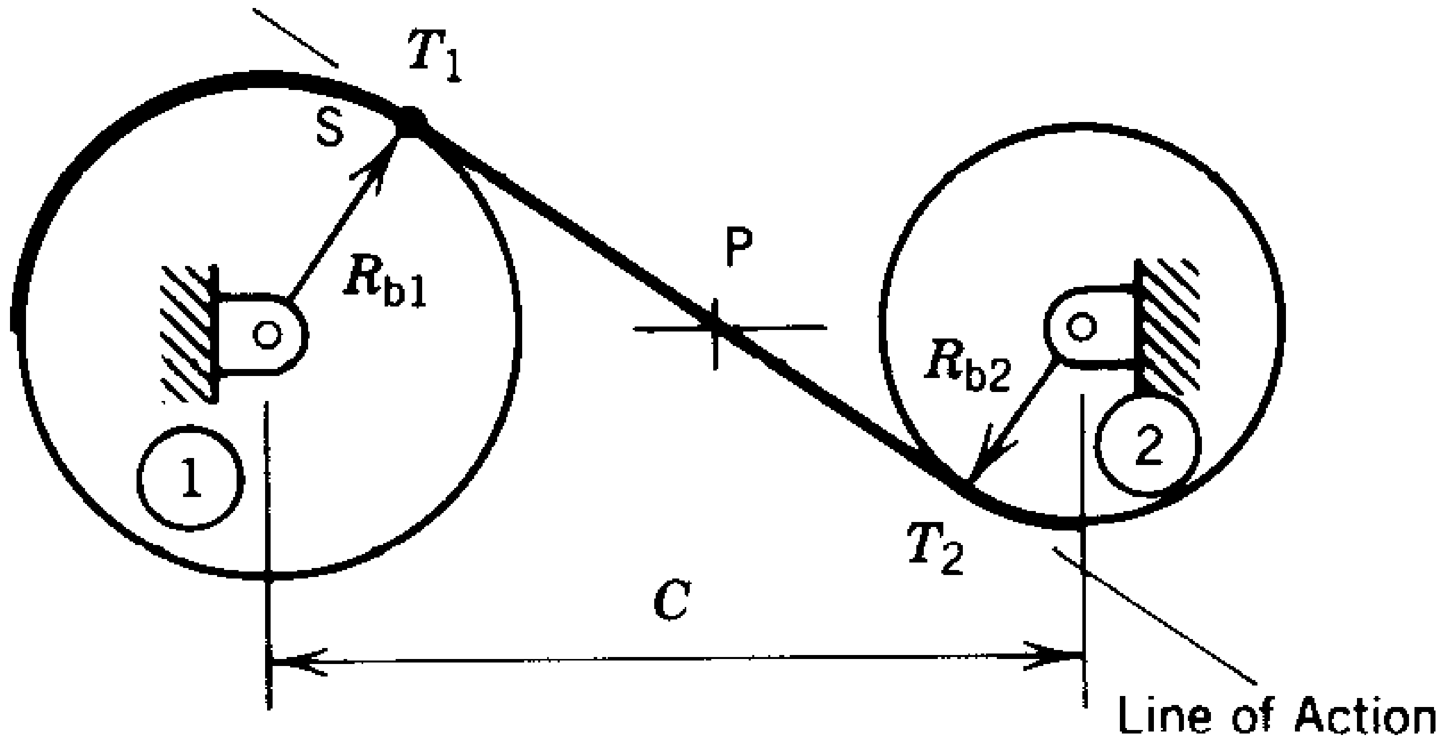


Imagen 2.108. Dos cilindros unidos por una cinta inextensible.

Para comprender la acción del diente de engranaje con perfil de evolvente, es útil considerar en primer lugar el proceso de enrollar una cinta inextensible desde un disco al otro, manteniendo la cinta tensa durante todo el tiempo. Los dos discos considerados están montados sobre ejes fijos, con una distancia entre ejes constante C. El radio de los discos con Rb1 y Rb2, respectivamente. La cinta sigue una línea recta tangente a los dos discos. Los puntos de tangencia son los puntos T1 y T2, que son fijos en el espacio. El proceso comienza con la cinta enrollada sobre el disco 1 y alrededor de la parte inferior del 2. El punto de interés está señalado en la cinta con la letra S, coincidiendo S con T1 cuando todo comienza. La rotación en sentido anti-horario del disco 2 hace que el disco gire en sentido horario.

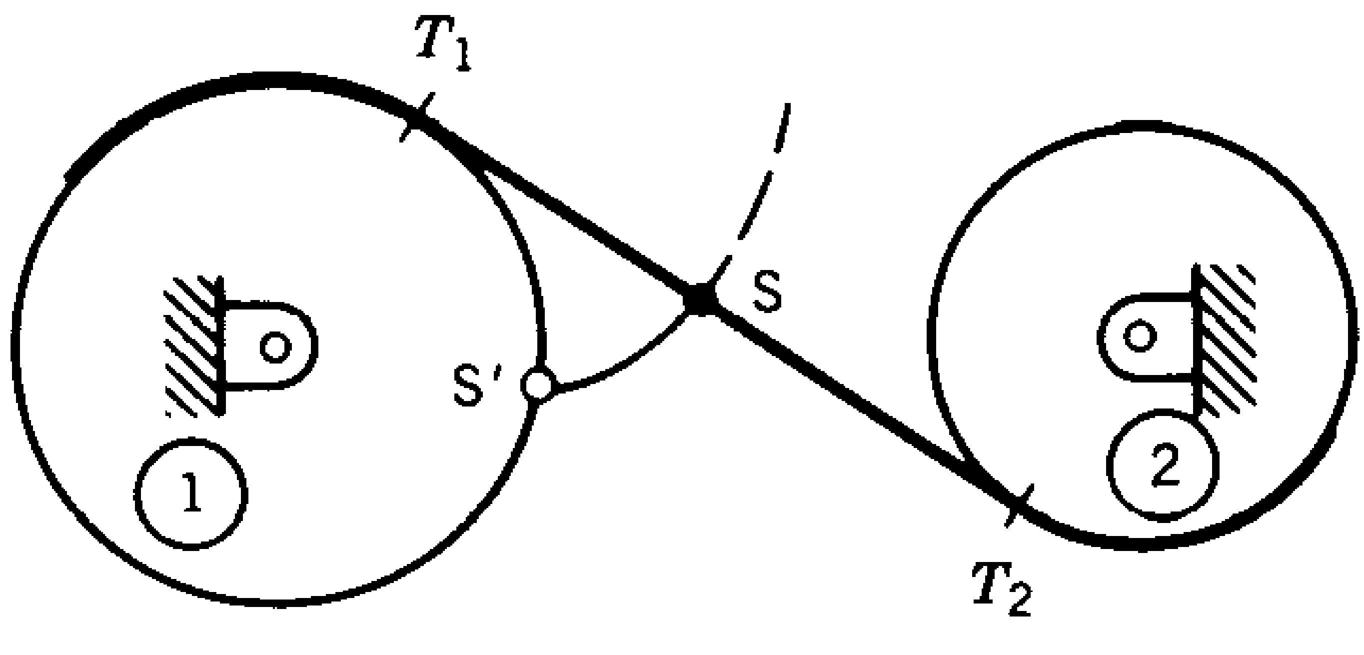


Imagen 2.109. Después de un pequeño giro.

Después de un pequeño giro, el sistema está tal y como indica la Imagen 9, donde el punto S esta sobre la parte recta de la cinta y no tienen contacto con ninguno de los dos discos. El punto sobre el disco 1 en el que previamente estaba el punto S se le denomina S', y la trayectoria seguida por el punto S relativa al disco 1 es la curva evolvente trazada desde S' hasta la posición actual. La línea de trazos indica la continuación de la curva evolvente. El disco 1 es el círculo base a partir del cual esa curva evolvente se ha generado.

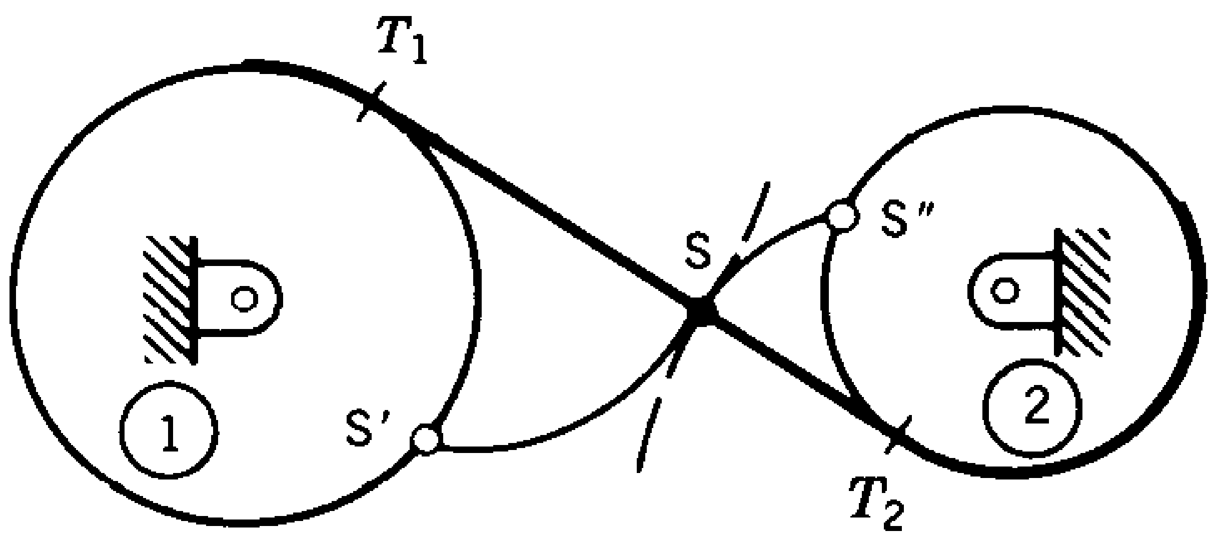


Imagen 2.110. Enrollamiento de la cinta sobre el disco 2.

El proceso de enrollar una cinta es simplemente el contrario de desenrollarla, y la cinta considerada aquí está en proceso de ser enrollada sobre el disco 2. El punto S deberá moverse a lo largo de la curva evolvente relativa al segundo disco. Por lo tanto, en cualquier punto a lo largo de la transición entre el disco 1 y el 2, el punto S se mueve simultáneamente a lo largo de dos curvas evolventes, la primera generada al desenrollarse del disco 1 (circulo base de radio Rb1) y la segunda generada al enrollarse sobre el disco 2 (circulo base de radio Rb2). Cuando el punto S alcanza el disco 2, coincide con la posición marcada S''.

Consideremos, ahora, las extensiones físicas de ambos discos, cada extensión con la forma de una curva evolvente generada desde el círculo base asociado y funcionando como un par de levas. Si se retira la cinta y el movimiento se controla manteniendo el contacto entre las dos levas, no existirá cambio en el tipo de movimiento.

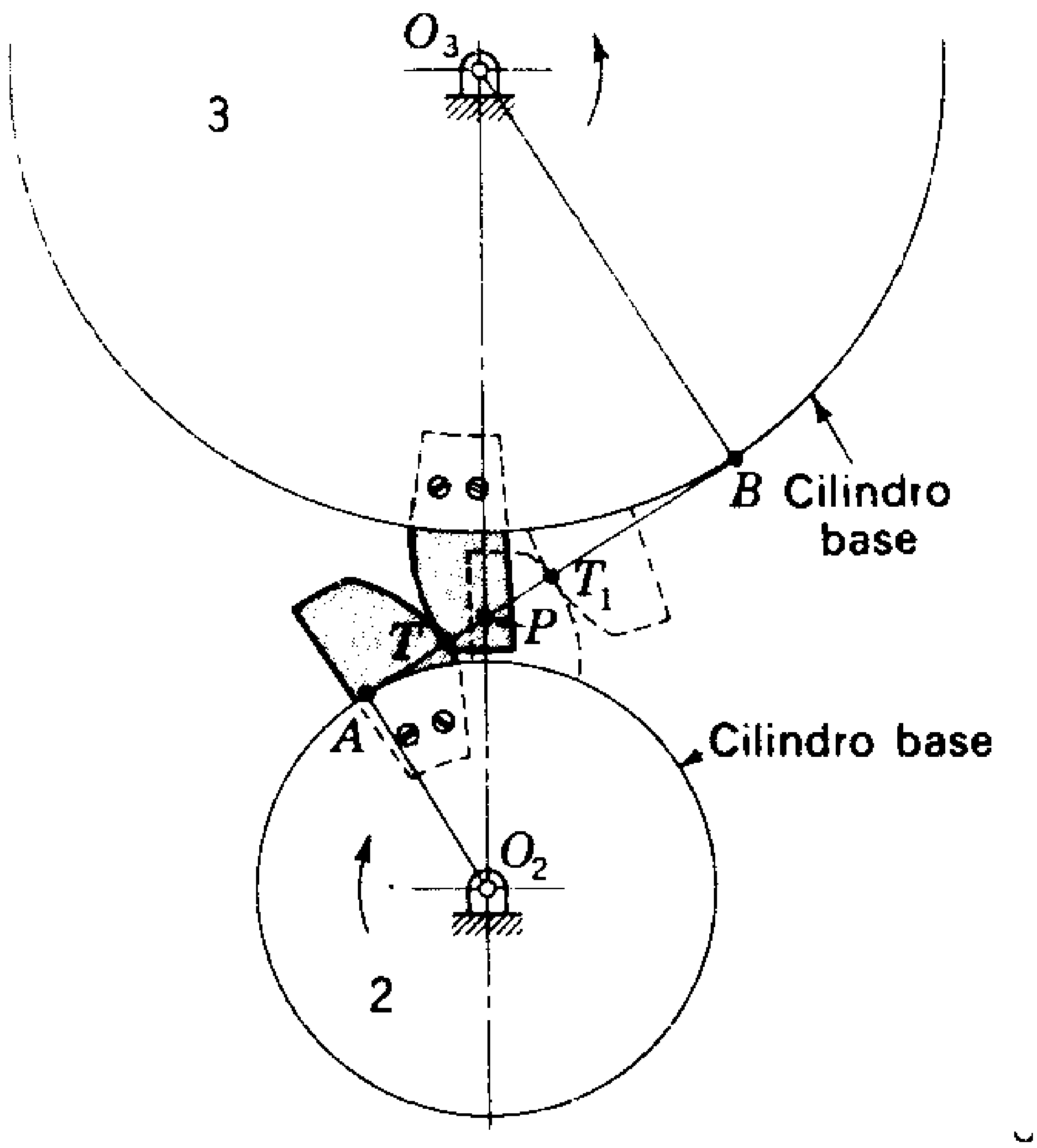


Imagen 2.111. Montaje de dientes sobre los círculos base.

Dos importantes observaciones deben tenerse en cuenta, que serán correctas en cualquier punto a lo largo de la transición. Primera, para que S esté en ambas curvas simultáneamente, las curvas deben ser tangentes entre ellas en el punto S. Segunda, la línea tangente a S a las dos curvas evolventes es perpendicular a la parte de cinta no enrollada. Por lo tanto, la parte recta de la cinta defina la línea de acción. La parte recta de la cinta (la línea de acción) siempre intersecta a la línea de centros en el mismo punto, P, con lo que el punto primitivo es estacionario.

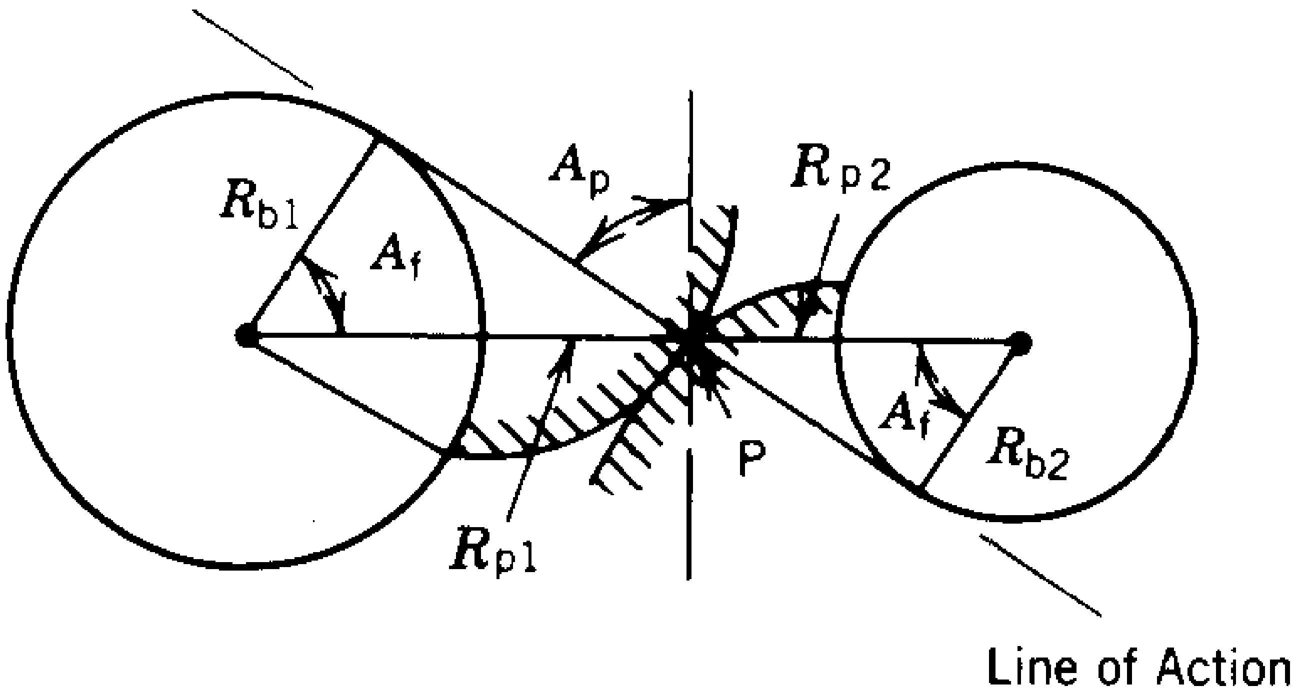


Imagen 2.112. Sentido físico de la línea de acción.

En consecuencia, la condición de relación de velocidades constante, tal y como especifica la Ley del Engrane, se satisface cuando ambos engranajes tienen dientes con perfiles de evolvente. Todo el contacto entre los dientes de los engranajes sucede a lo largo de la línea de acción. Recuerda que la línea de acción es la trayectoria de S durante la transición desde el primer círculo base al segundo, y que los dos perfiles de los dientes de los engranajes son siempre tangentes entre ellos en S. En ausencia de rozamiento, la fuerza de contacto entre los dos cuerpos estará a lo largo de la normal a las superficies en el punto de contacto. Por lo tanto, en ausencia de rozamiento, la fuerza de contacto estará siempre a lo largo de la línea de acción, una línea que tiene una orientación fija. La orientación de la línea de acción se describe por el ángulo Ap, denominado ángulo de presión, porque describe la dirección de la "presión" (fuerza) entre los dientes de los engranajes, como se muestra en esta figura. Para un par de dientes con perfiles de evolvente que están engranando en el punto primitivo, el ángulo del flanco en el punto de contacto es igual al ángulo de presión.

Si el disco 1 gira un ángulo A1, Rb1*A1 unidades de longitud de cinta se transfieren al segundo disco, provocando una rotación A2 en este disco. La relación entre ambas rotaciones será la siguiente:

$$R_{b1}A_1 = R_{b2}A_2 \qquad (14)$$

Esta será la relación entre las velocidades angulares, proporcionales a los radios base de ambos engranajes:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{R_{b1}}{R_{b2}} \qquad (15)$$

El radio primitivo se define como la distancia desde el centro del engranaje al punto primitivo. Los radios primitivos se representan por Rp1 y Rp2. La relación entre el radio base y el radio primitivo será la siguiente:

$$R_b = R_p \cos A_p \qquad (16)$$

Esta será la relación entre las velocidades angulares, proporcionales a los radios primitivos de ambos engranajes:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \qquad (17)$$

Relación muy útil cuando hablemos de trenes de engranajes. Ya que la suma de los radios primitivos es igual a la distancia (constante) entre centros, el radio primitivo se puede interpretar como el radio de un par de ruedas de fricción, cinemáticamente equivalentes a los dos engranajes. Esta forma de pensar es muy conveniente para entender los trenes de engranajes.

Algunas propiedades son intrínsecas de un engranaje (rueda) individual, tal y como el círculo base, mientras que otras propiedades pertenecen a los pares de engranajes en contacto, tales como el punto primitivo y el ángulo de presión. La distancia entre centros y la línea de acción juegan papeles críticos al definir el punto primitivo y ángulo de presión reales de un par de engranajes. Ni el punto primitivo ni el ángulo de presión existirán hasta que los engranajes estén en contacto. Solo cuando se han situado los centros de los engranajes, es posible hablar de distancia entre centros y línea de acción.

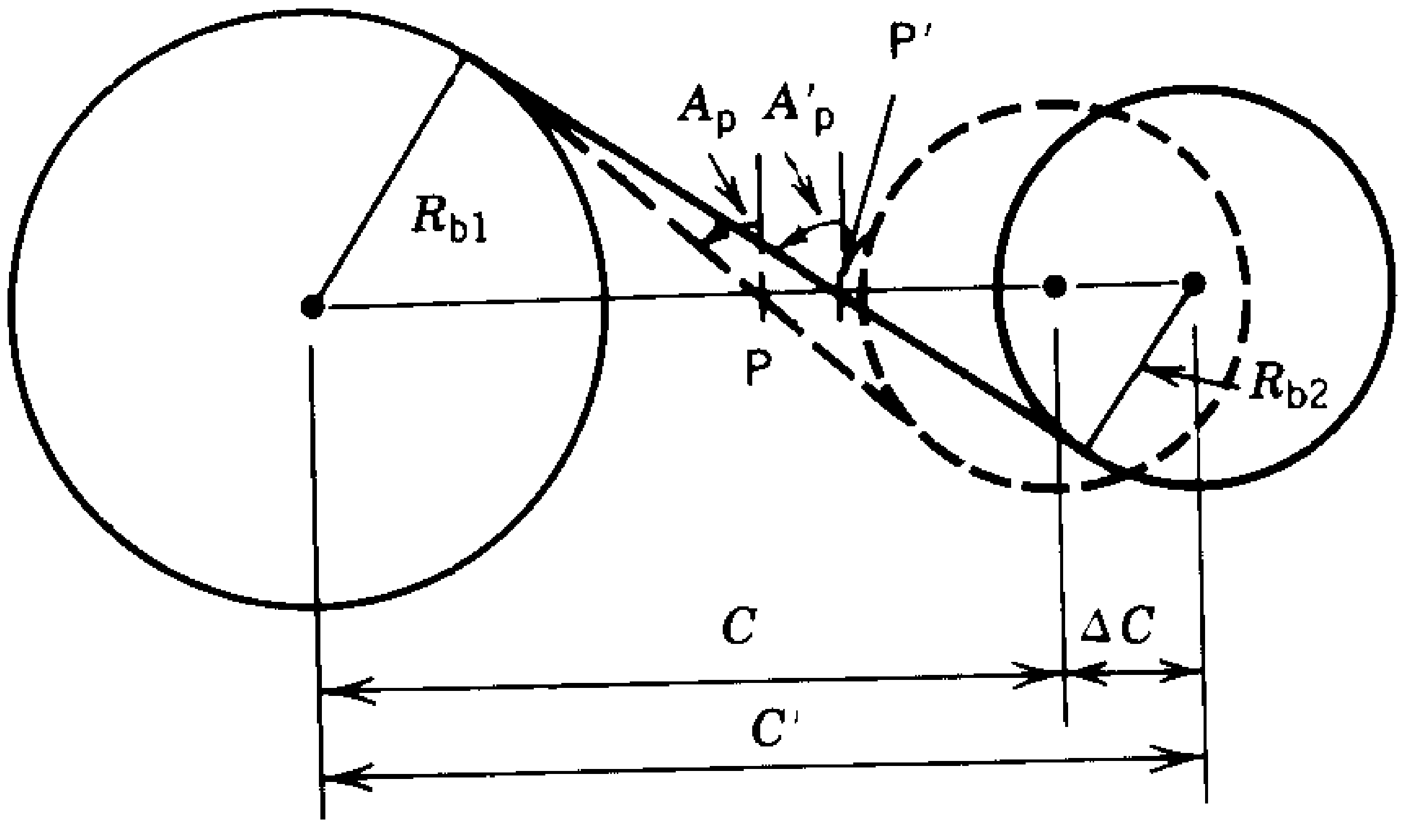


Imagen 2.113. Angulo de presión.

La línea de acción se define a partir de los círculos base de ambos engranajes y la distancia entre centros real, ya que la línea de acción es tangente a ambos círculos base. El resultado de cambiar la distancia entre centros, afecta tanto a la localización del punto primitivo como al ángulo de presión, como se puede observar en esta figura. Con la distancia entre centros nominales, C, el punto primitivo es P y el ángulo de presión es Ap. Cuando se incrementa la distancia entre centros a C' = C + œC, el punto primitivo se mueve hacia la derecha a P', y el ángulo de presión se incrementa a Ap'. La observación más importante es que la acción conjugada se mantiene, y la relación de velocidades permanece inalterada. Esto significa que no es necesario ajustar perfectamente la distancia entre ejes para conseguir la acción conjugada con engranajes con perfil de evolvente. Lo que contrasta con los engranajes con dientes con perfiles cicloidales (mecanismos de relojería), en los que la acción conjugada solo se consigue a la distancia entre ejes nominal. Como resultado de lo anterior, los engranajes con perfil de evolvente son fáciles de construir. Para conseguir la acción conjugada los perfiles de los dientes deben ser de evolvente, pero existen otros partes del engranaje y de su diente que se deben describir también. Las veremos a continuación.


12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Involute Gears

A single pair of involute gear teeth can be modeled with **Mech2D** as a pair of cam surfaces. **Mech2D** provides a function for generating the involute profiles based on the standard gear tooth specifications.

Involute[*alpha*, {*x*, *y*}, *baserad*, *pitchrad*, *ang*] returns a parametric function representing an involute gear tooth, as a function of the symbol *alpha*. The involute has a base circle radius of *baserad* and a pitch circle radius of *pitchrad* centered at {*x*, *y*}. The involute profile is rotationally located such that the point where the profile intersects the pitch circle lies on a ray that passes through {*x*, *y*} in the direction of the specified angle *ang*. If *pitchrad* is negative, the profile spirals outward in the clockwise direction. The involute locus travels from the base circle to the pitch circle as *alpha* goes from 0 to sqrt(*pitchrad* ^ 2 - *baserad* ^ 2) / *baserad*.

The involute gear tooth function.

Interference is an option for **Involute**. Setting **Interference** → **True** specifies that the **Involute** locus shall blend into a straight line from the point where the involute profile meets the base circle to the center of the base circle.

An option for **Involute**.

The following example uses two gear tooth loci (functions of the symbols **g1** and **g2**) located on a pair of mating gears. Note that the coordinates of the center point and the rotation angle of the involute are given in local coordinates. The tooth loci are not placed onto their respective bodies until they are put into **Mech2D** point objects.

In[12]:=

```
Needs["Mech`Mech2D`"]
```

Here is a pair of tooth loci.

In[13]:=

```
locuspoint1 = Involute[g1, {0, 0}, 4.0, 5.0, 0];
locuspoint2 = Involute[g2, {0, 0}, 5.6, 7.0, π]
```

Out[14]=

```
{5.6 (Cos[3.03509 + g2] + g2 Sin[3.03509 + g2]),
 5.6 (-g2 Cos[3.03509 + g2] + Sin[3.03509 + g2])}
```

Four constraints are used to model the two gear teeth.

A **Revolute2** constraint forces the center of gear 1 to be located at {0, 0}.

A **RotationLock1** constraint rotates gear 1.

A **Revolute2** constraint forces the center of gear 2 to be located at {12, 0}.

A **CamToCam1** constraint is used to enforce the contact of the gear teeth.

Here are the involute gear model constraints.

In[15]:=
```
ground = 1;
gear1 = 2;
gear2 = 3;
SetConstraints[
    Revolute2[1, Point[ground, {0, 0}], Point[gear1, {0, 0}]],
    RotationLock1[2, gear1, 2.0 π T],
    Revolute2[3,
        Point[ground, {12, 0}], Point[gear2, {0, 0}]],
    CamToCam1[4, Point[gear1, locuspoint1], {g1, 1},
  Point[gear2, locuspoint2], {g2, 1}]]
```

The model is run at T = 0.01.

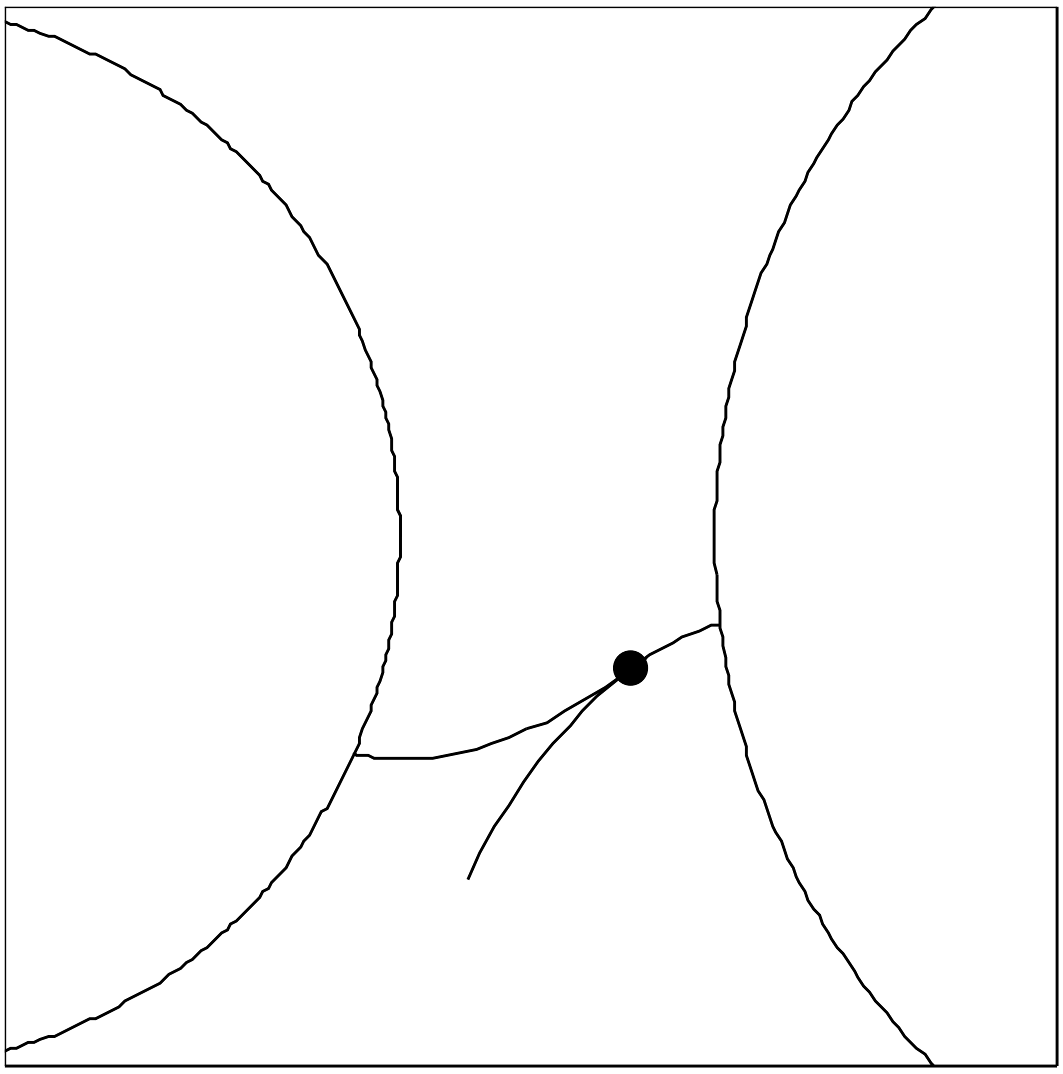
In[34]:=
```
SolveMech[-0.05, Solution → Velocity]
```

Out[34]=
```
{T → -0.05, X2 → 0., Y2 → 0., Th2 → -0.314159, X3 → 12.,
 Y3 → 0., Th3 → 0.224399, g1 → 1.06416, g2 → 0.525601,
 X2d → 0., Y2d → 0., Th2d → 6.28319, X3d → 0., Y3d → 0.,
 Th3d → -4.48799, g1d → -6.28319, g2d → 4.48799}
```

In[23]:=
$$\left\{-\frac{\text{Th2d}}{\text{Th3d}} \text{ /. \%}, \frac{5.6}{4.0}\right\}$$

Out[23]=
```
{1.4, 1.4}
```

In[37]:=
```
postab = SolveMech[{-0.05, 0.05}, 20];
```



2.2.2. Terminología.

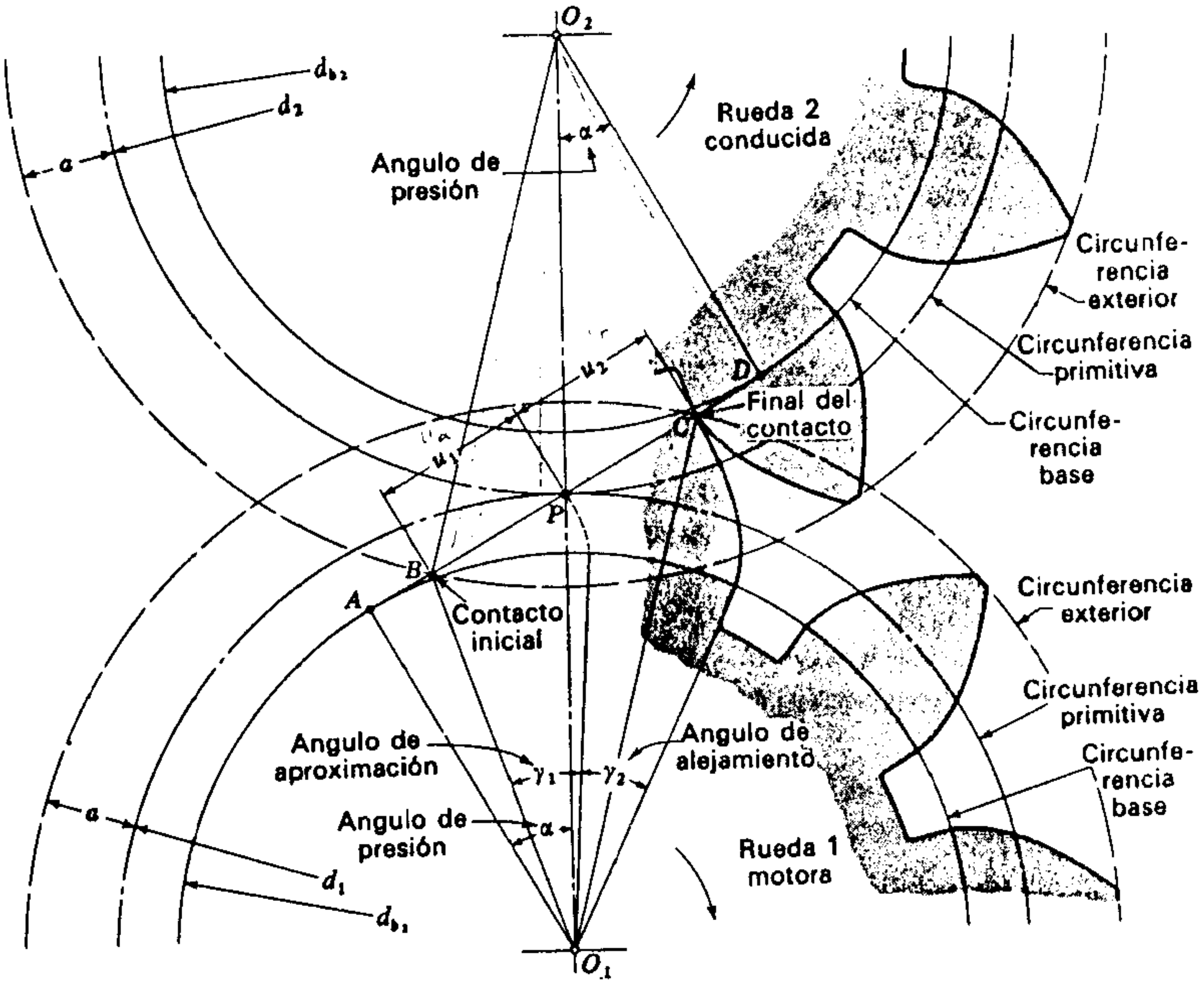


Imagen 2.114. Terminología asociada a un par de engranajes cilíndricos de dientes rectos.

Los engranajes rectos se utilizan para transmitir movimientos de rotación entre ejes paralelos; normalmente, tienen forma cilíndrica y sus dientes son rectos y paralelos a los ejes de rotación. Por engranaje se entiende el conjunto de dos o más piezas dentadas que engranan.

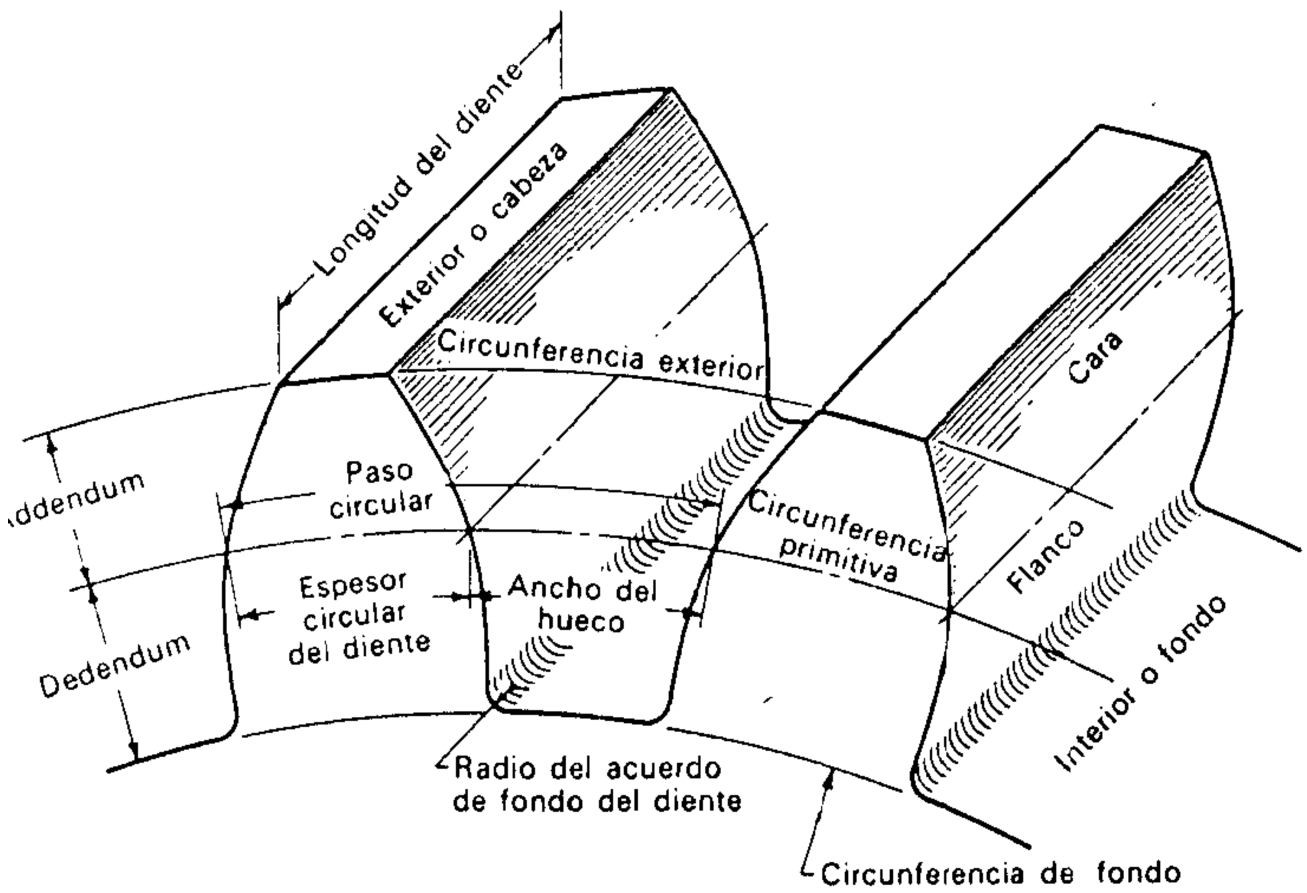


Imagen 2.115. Detalle terminología asociada a los dientes.

En la Imagen 14 se representan gráficamente muchas de las definiciones siguientes de la terminología de los dientes de los engranajes.

La circunferencia teórica que, en general, es la base de todos los cálculos se conoce con el nombre de circunferencia primitiva. Cuando dos ruedas dentadas engranan, sus circunferencias primitivas son tangentes. Entre dos ruedas que engranan la de menor radio recibe el nombre de piñón y la de mayor radio el de rueda. Si las ruedas son iguales, a ambas se las llama ruedas o piñones, según que su diámetro sea mayor o menor que la longitud del diente.

Paso circular p es la distancia, medida sobre la circunferencia primitiva, entre dos puntos homólogos de dos dientes consecutivos. Paso diametral P o "diametral pitch" es el número de dientes que tiene el engranaje por cada pulgada de diámetro primitivo. La unidad de diametral pitch es la inversa de la pulgada, o sea, in^{-1}. Obsérvese que el diámetro primitivo no puede medirse realmente en el engranaje. *El paso diametral métrico se llama módulo de generación y es el cociente entre el diámetro primitivo y el número de dientes*. Por tanto, el módulo indica cuántos milímetros corresponden en el diámetro primitivo a cada diente. Se representa por m. Para evitar confusiones entre el paso diametral métrico y el paso diametral inglés se suele denominar siempre módulo al métrico y diametral pitch al otro. Entre el modulo m y el diametral pitch P existe la siguiente relación:

$$m\ P_d = 25,4 \tag{18}$$

En realidad, tanto el módulo como el diametral pitch indican el tamaño de diente utilizado en el sistema métrico o el inglés. Si se desean calcular engranajes del tipo basado en la pulgada, la forma más sencilla es, de entrada, transformar el diametral pitch a emplear en el módulo de cálculo por la ecuación anterior, o bien, en todas las fórmulas en que aparece el módulo colocar, en lugar de éste, 1/P y operar con todas las medidas en pulgadas. Siempre los módulos vienen dados en mm/diente y los diametral pitch en dientes/in.

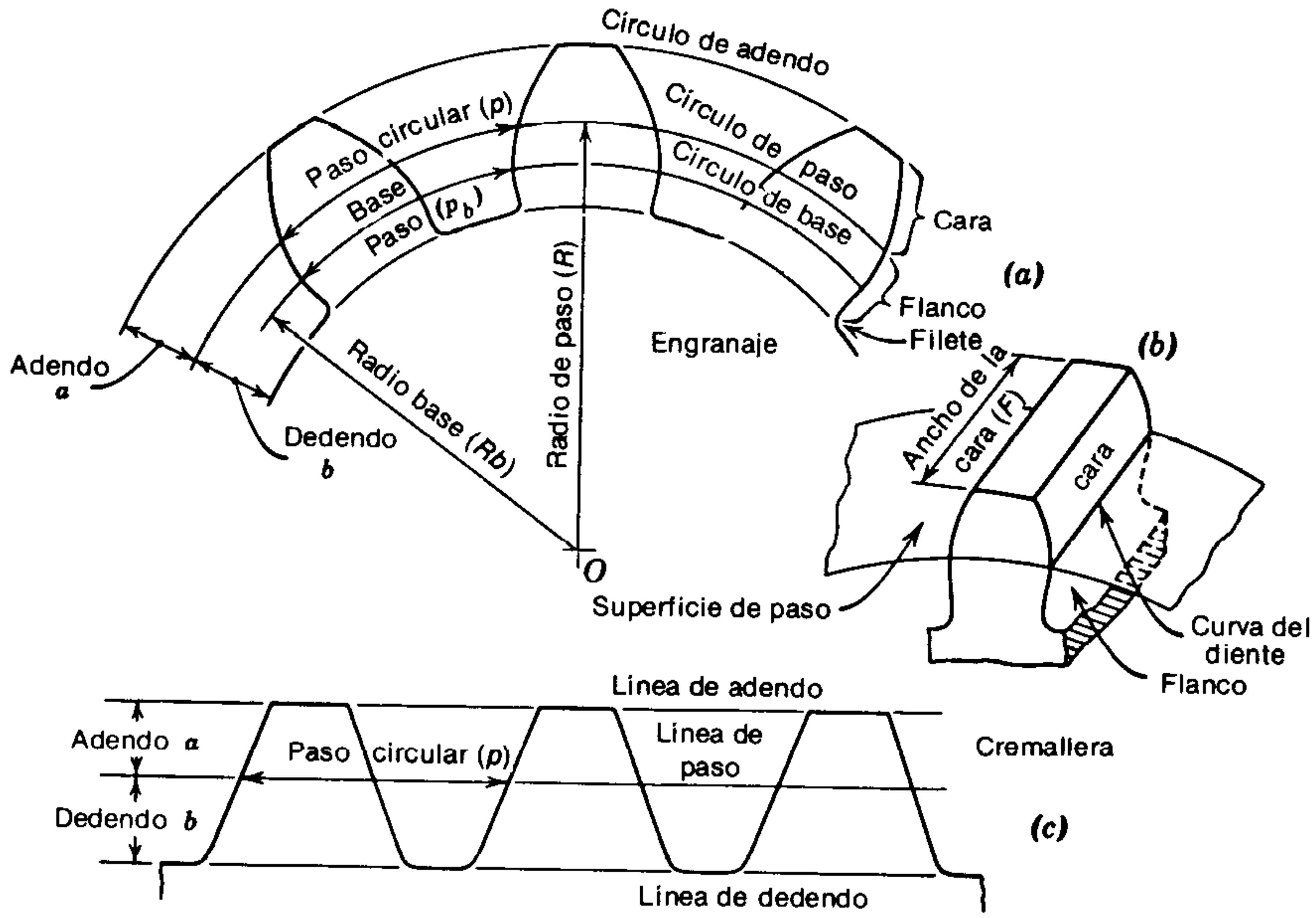


Imagen 2.116. Terminología asociada a los dientes de un engranaje.

Addendum a, es la distancia radial entre la circunferencia primitiva y la circunferencia exterior. En la rueda con engrane por el interior, el addendum es la distancia radial entre la circunferencia primitiva y la circunferencia interior. Dedendum b, es la distancia radial entre la circunferencia primitiva y la circunferencia de fondo. En los engranajes interiores el dedendum es la distancia radial entre la circunferencia primitiva y la circunferencia de fondo, igual que en los exteriores. Profundidad del diente h es la suma del addendum y dedendum. Espacio libre de fondo es la cantidad en que el dedendum del diente excede al addendum del diente conjugado. Juego entre dientes es la cantidad en que el ancho de un hueco excede al espesor del diente que en él engrana, medidos ambos sobre la circunferencia primitiva.

Por definición de módulo es válida la siguiente fórmula fundamental, en la que D es el diámetro primitivo de la rueda, m el modulo y N el número de dientes:

$$D = m\ N \tag{19}$$

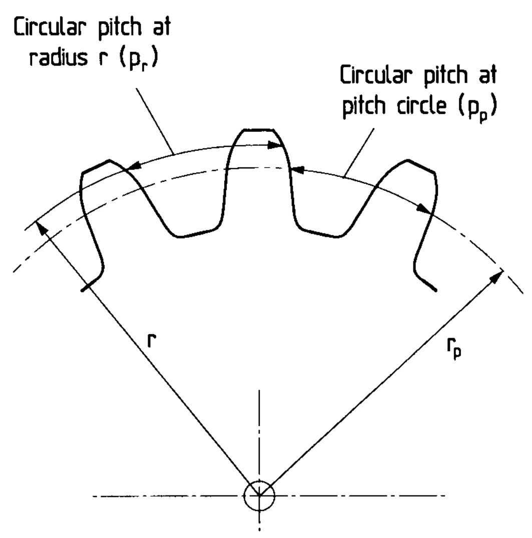
Puede definirse el paso sobre la circunferencia primitiva por esta expresión, en donde p es el paso circular en milímetros:

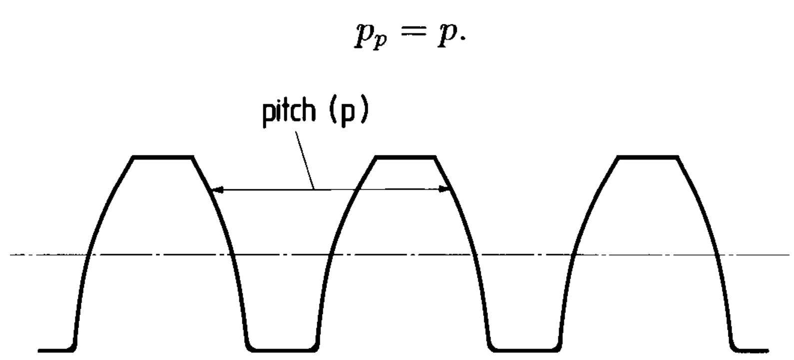
$$p = m\ \pi \tag{20}$$

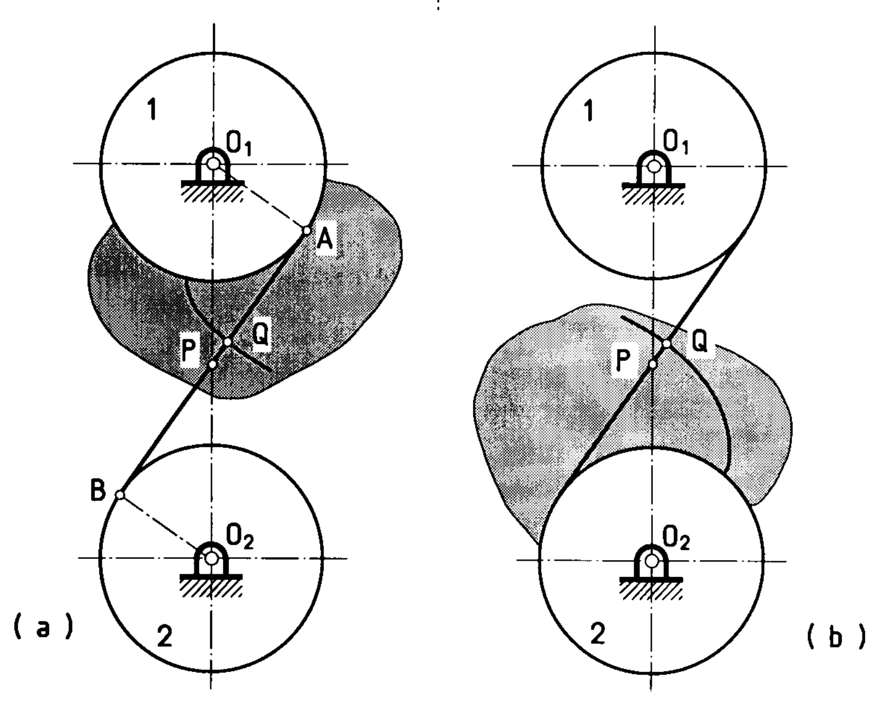
Se deduce de inmediato que también es válida esta expresión:

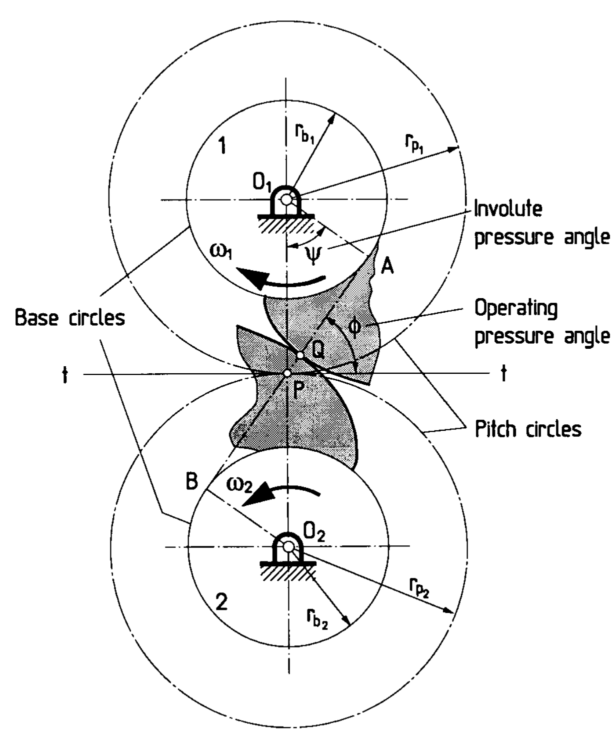
Imagen 2.117. $p\ N = \pi\ D$ (21)

Para concluir indicar que el valor numérico del módulo determina completamente el tamaño del diente. Si los dientes de una rueda son de módulo unidad tienen un paso circular de pi mm, según la ecuación anterior. El paso es el mismo sin importar si los dientes se colocan en un piñón pequeño o en una rueda grande. Un valor grande del módulo o del paso circular indica un diente grande y un valor pequeño indica un diente pequeño. Por consiguiente, los dientes de módulo 10 son mayores que los de módulo 6. Lo contrario ocurre con el diametral pitch, pues cuanto mayor es éste, menores son los dientes.









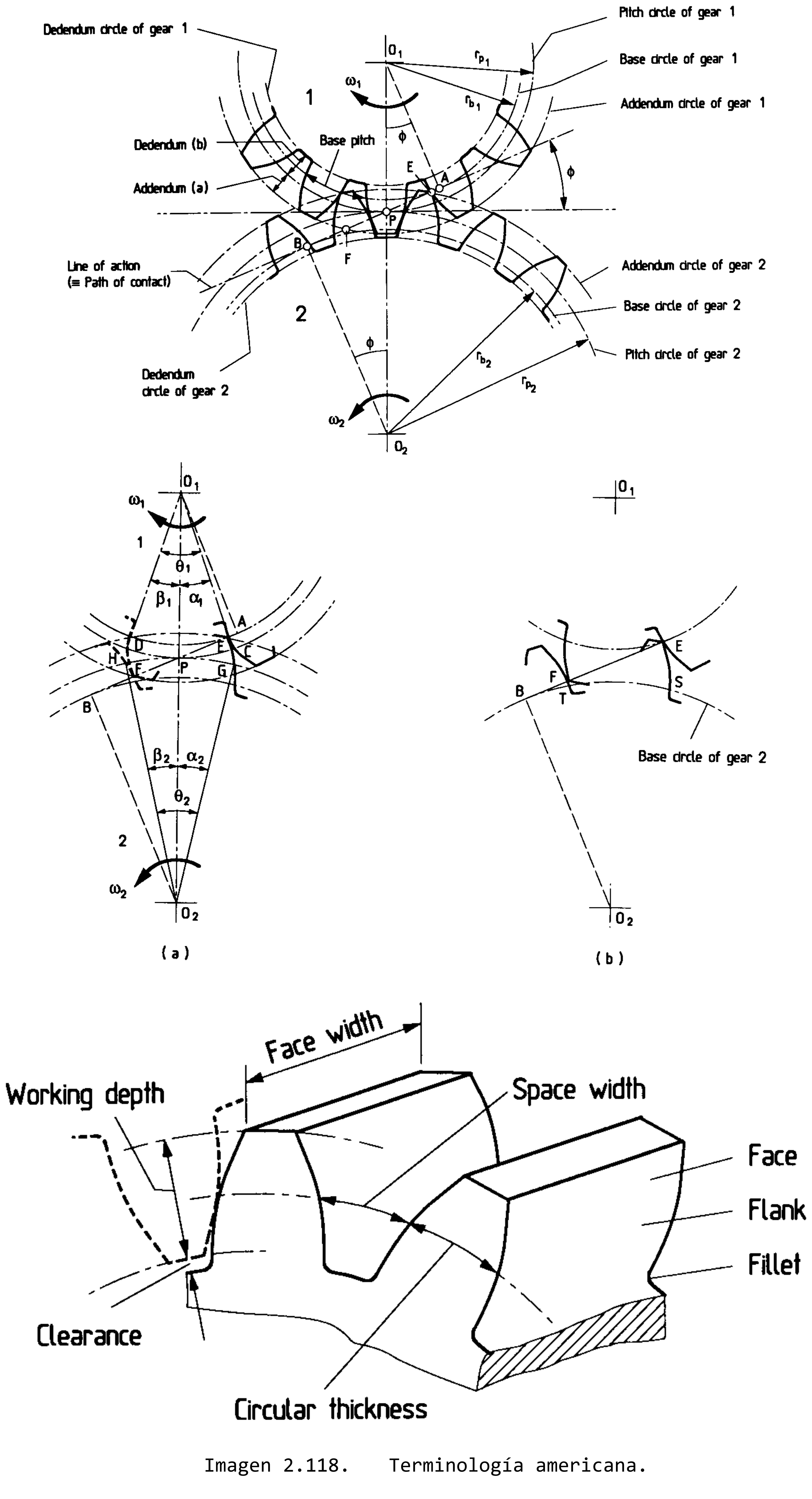


Imagen 2.118.   Terminología americana.

2.2.3. Características de funcionamiento del diente con perfile de evolvente.

En la sección previa, se discutieron las características básicas y algunos puntos importantes sobre la acción del diente con perfil de evolvente. En esta sección se realiza un análisis más cuantitativo sobre varios aspectos relacionados con la acción del diente de evolvente. Concretamente se habla sobre la *relación contacto*, la importancia que esta tiene para un funcionamiento suave del conjunto, y que es posible modificarla variando la distancia entre centros, pero que este método está limitado. A continuación se explican los efectos de una disminución excesiva de la distancia entre centros, introduciéndose el concepto de *interferencia*, o contacto entre curvas que no son curvas evolventes. Se comenta como determinar la mínima distancia entre centros para evitar la interferencia. Se comenta brevemente el tema de la *standarización de engranajes con perfil de evolvente*. Se explica cómo calcular el *mínimo número de dientes* para una determinada relación de transmisión con el fin de evitar la interferencia. Se explica cómo elegir adecuadamente el *juego* que ha de existir entre dientes, para evitar la aparición de ruido. Por último, se indica como calcular la velocidad de deslizamiento entre dientes, ya que el producto de ella por las tensiones de Hertz se suele tomar como parámetro en el diseño de engranajes que han de funcionar a altas velocidades.

(Esta sección está pendiente de desarrollo, únicamente se proporcionan las figuras)

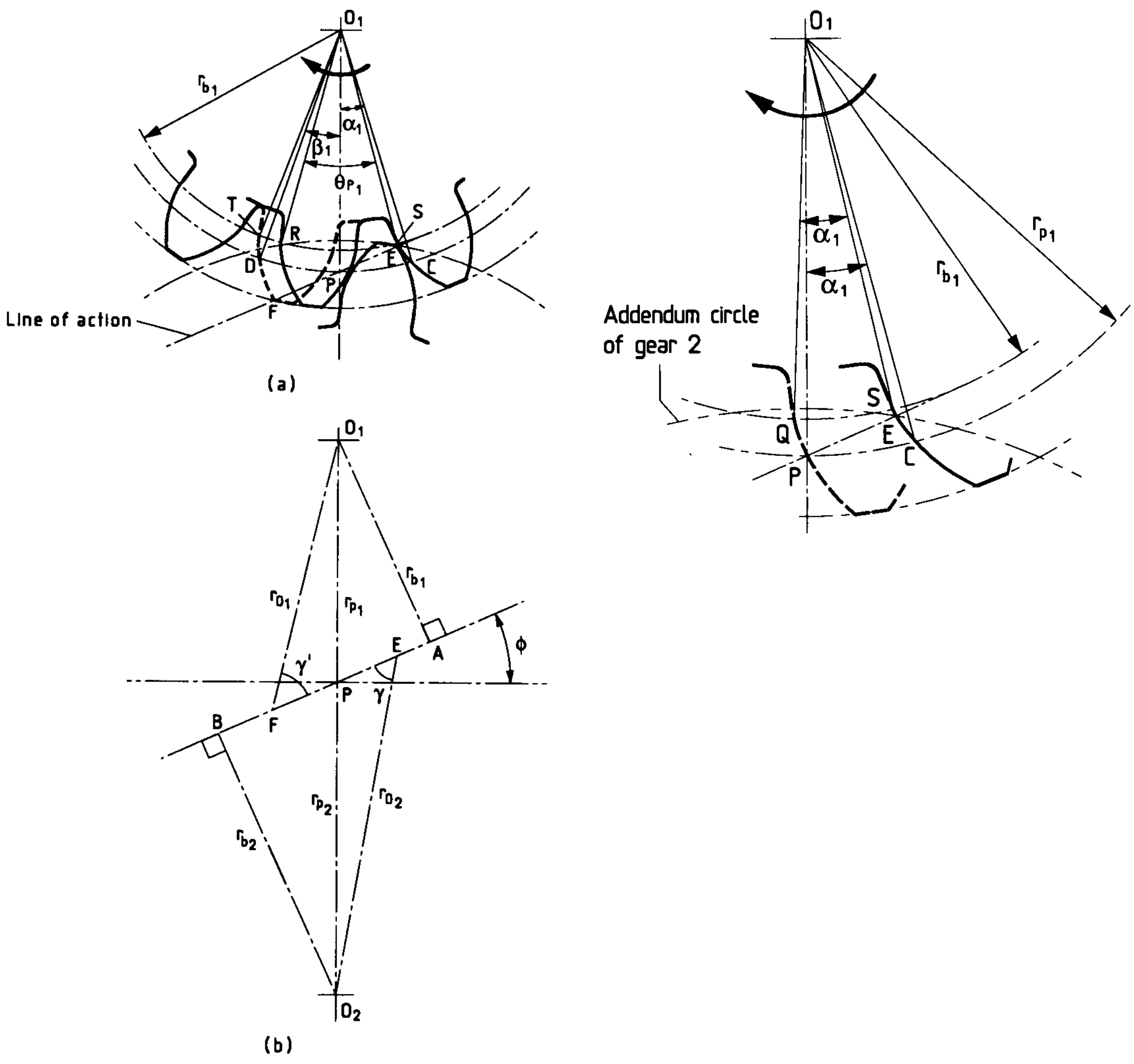


Imagen 2.119. Características.

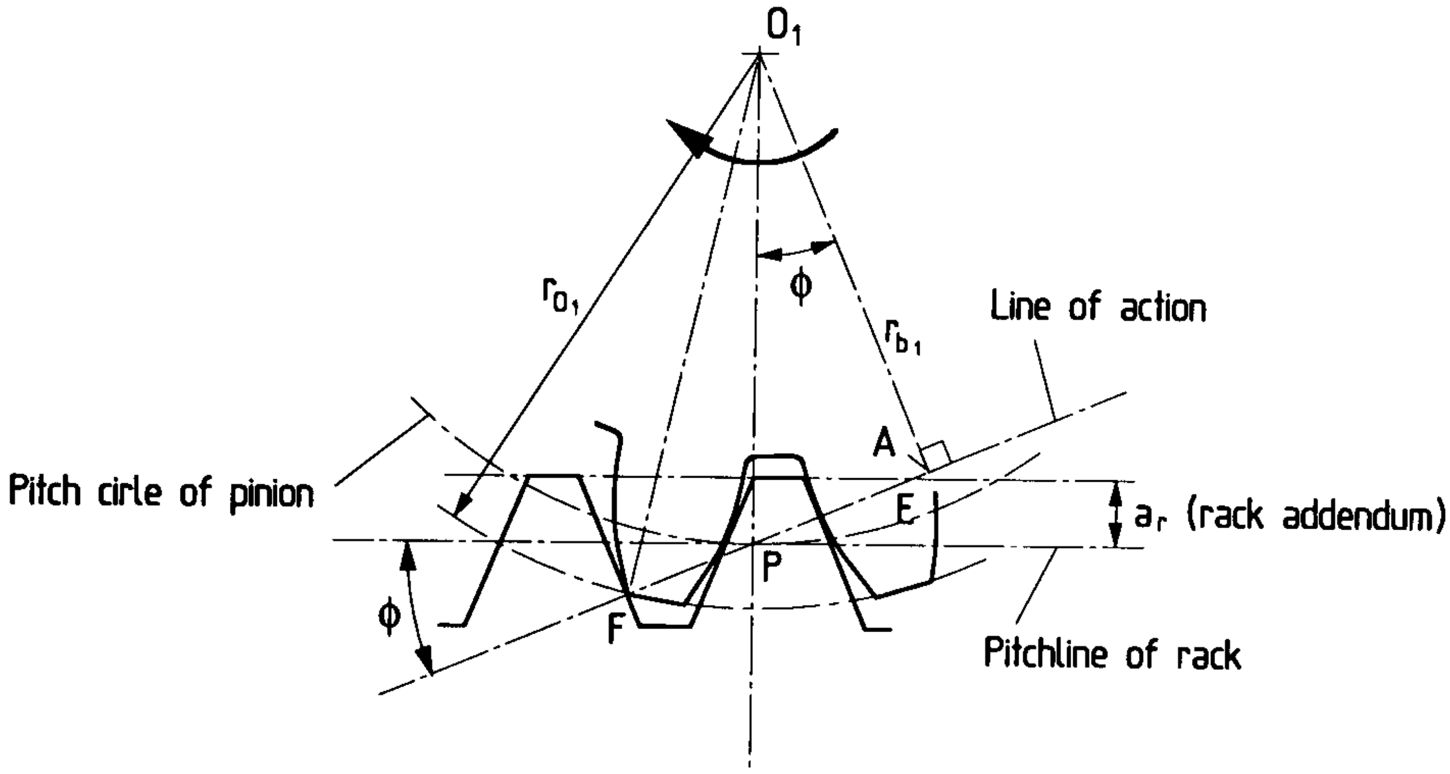


Imagen 2.120. Características.

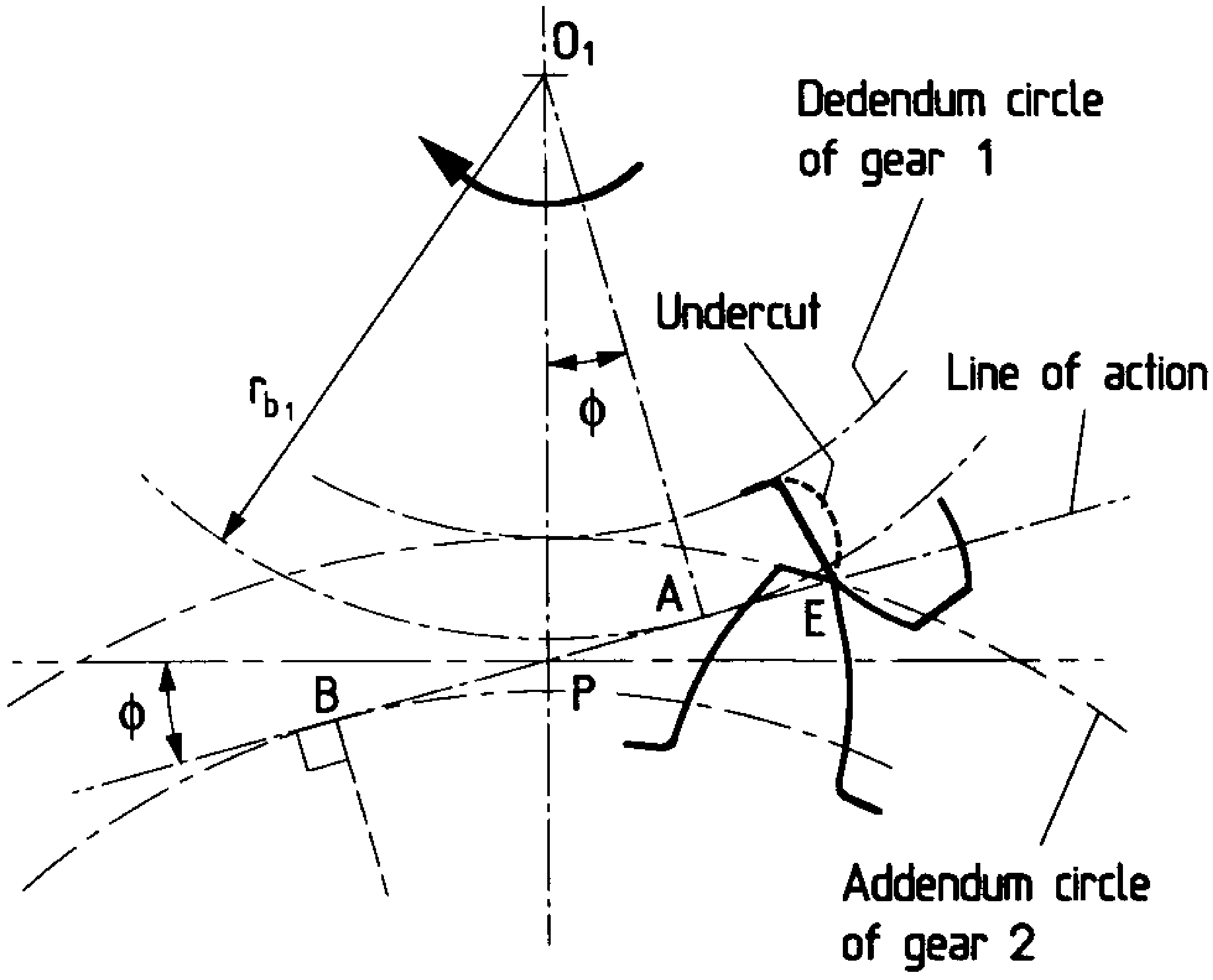


Imagen 2.121. Características.

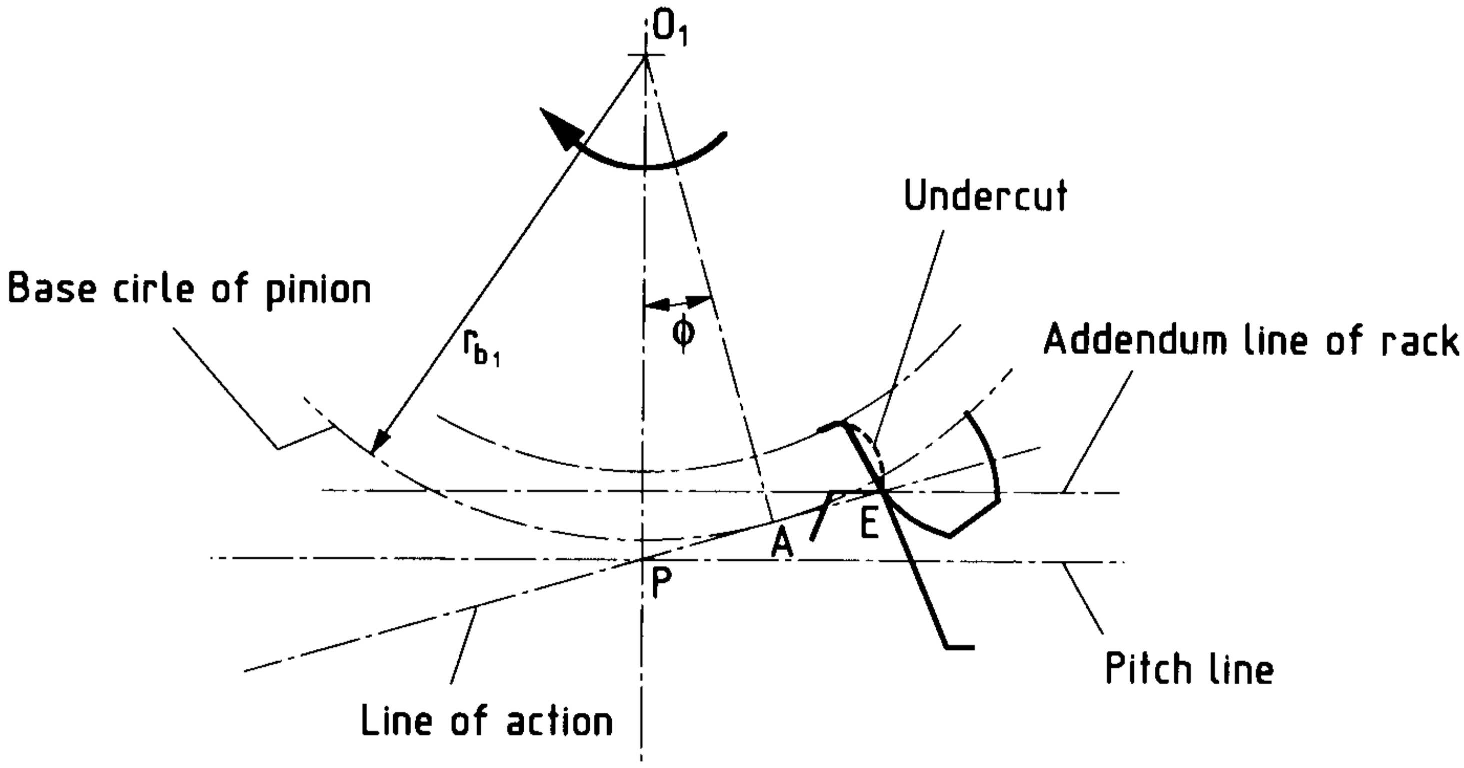


Imagen 2.122. Características.

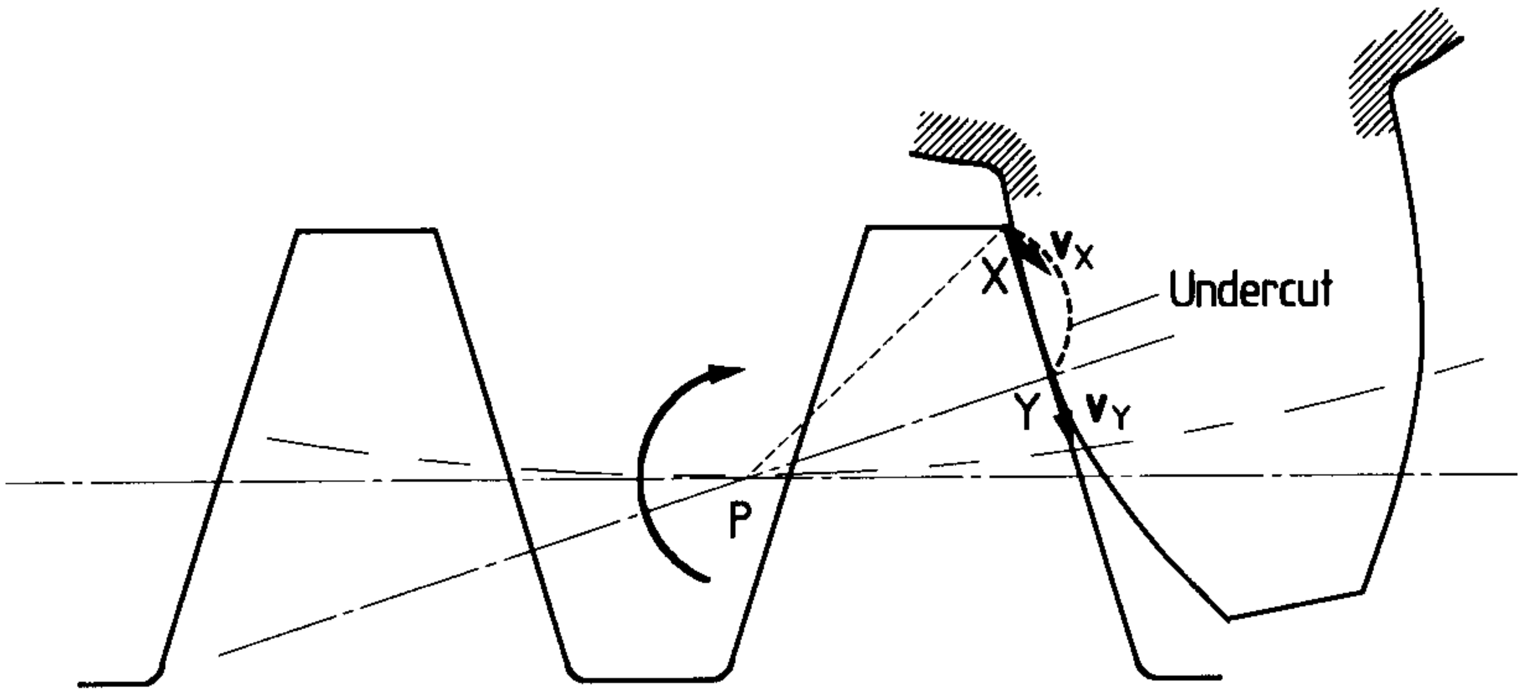


Imagen 2.123. Características.

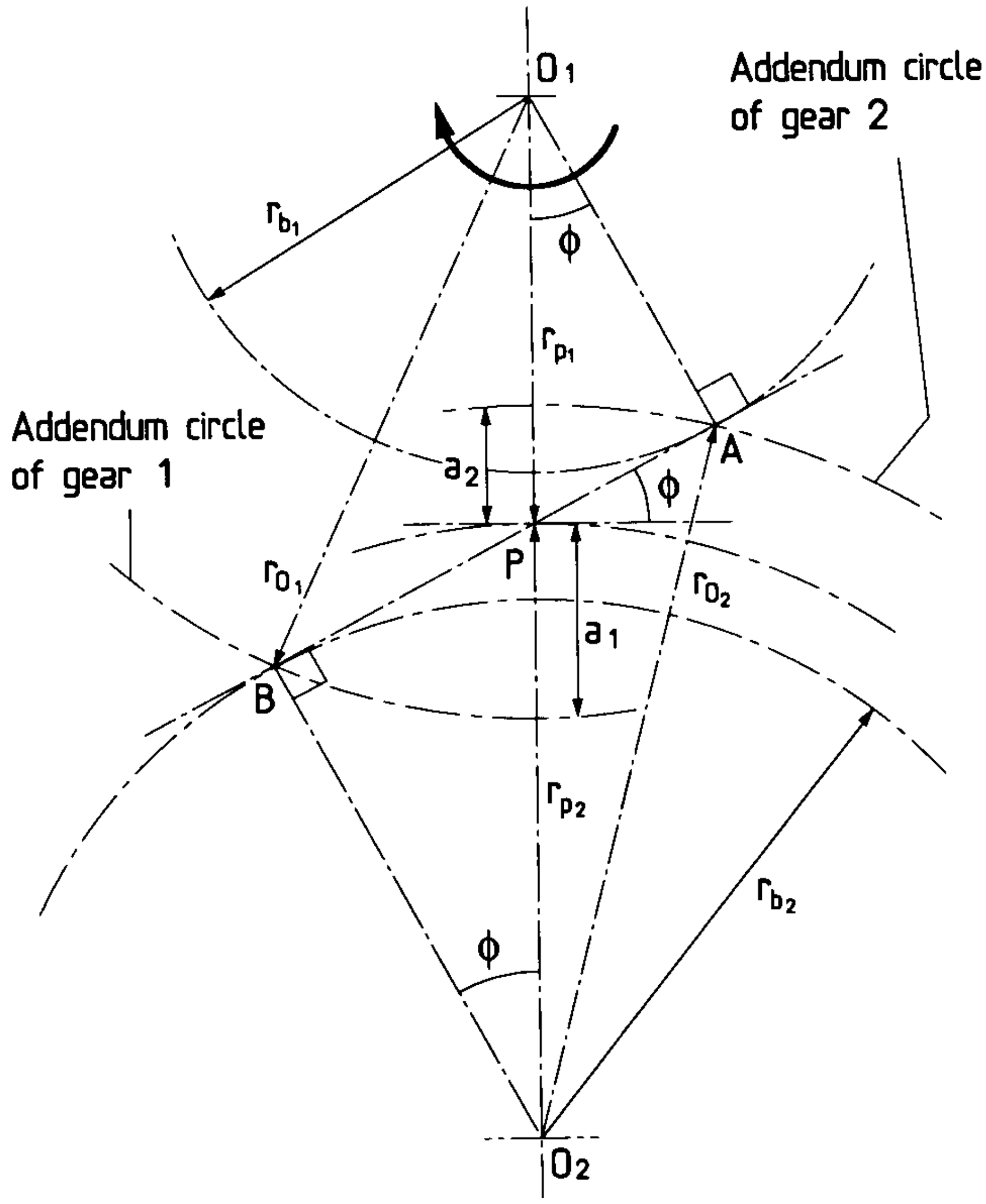


Imagen 2.124.   Características.

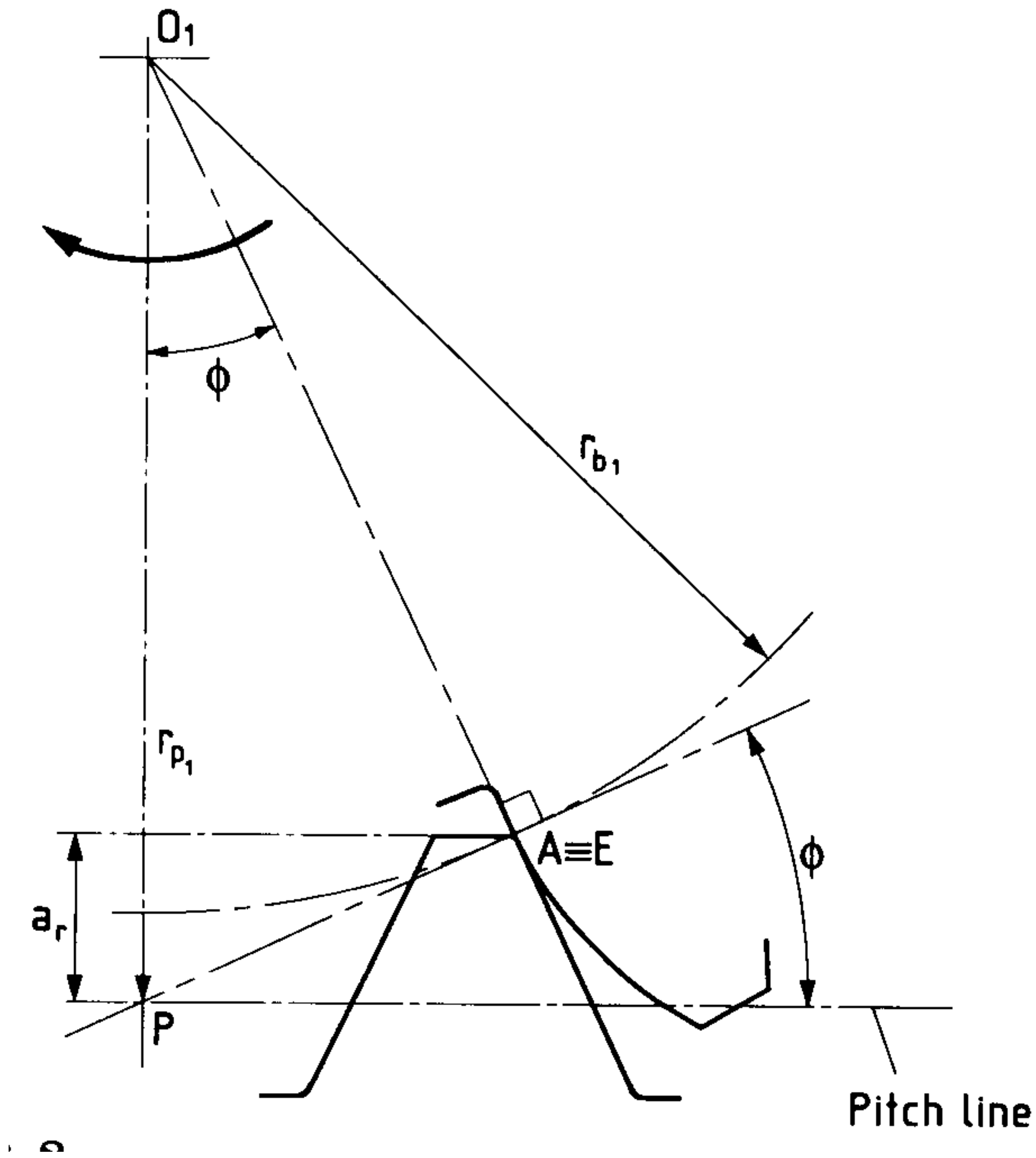


Imagen 2.125.   Características

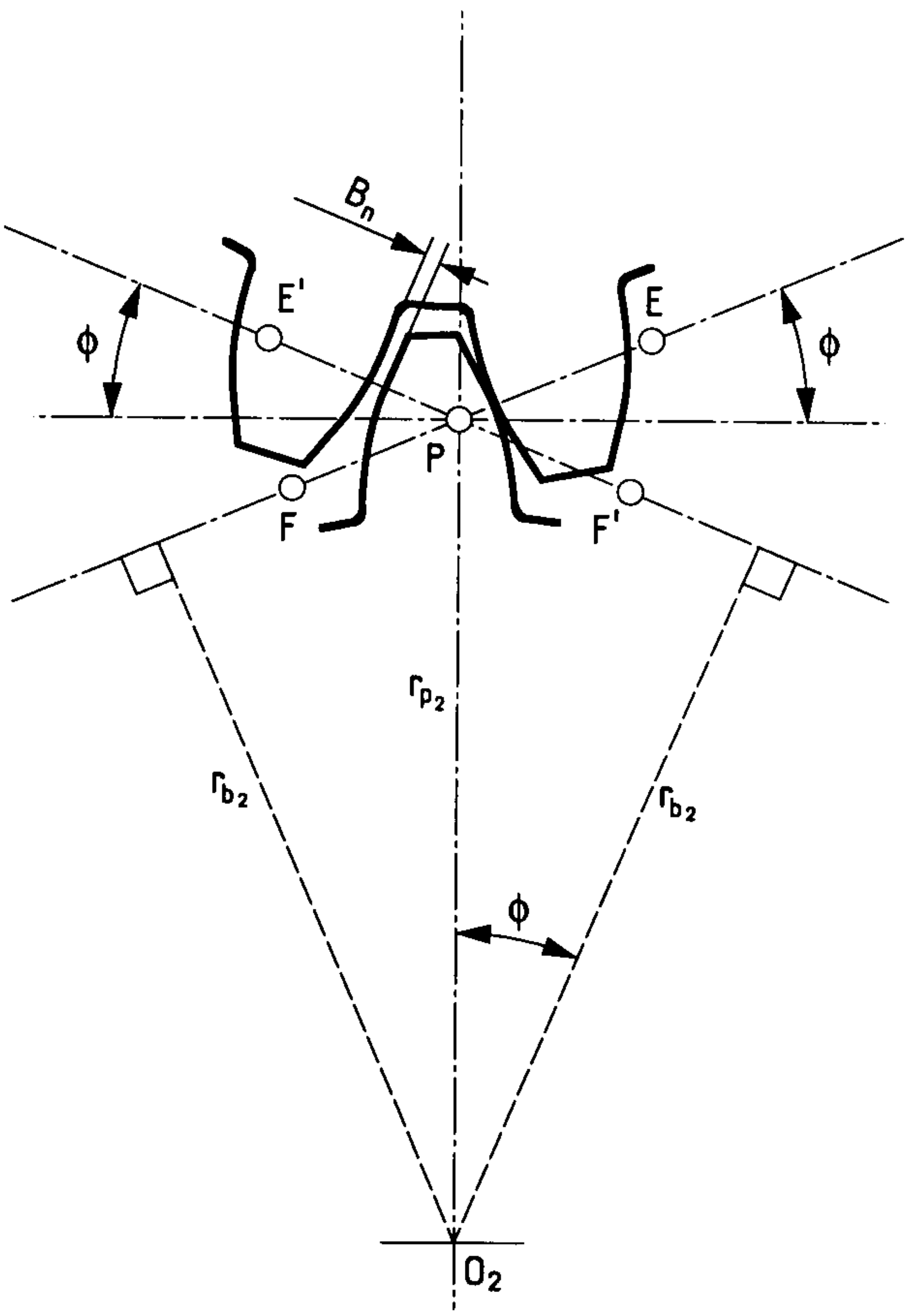


Imagen 2.126. Características.

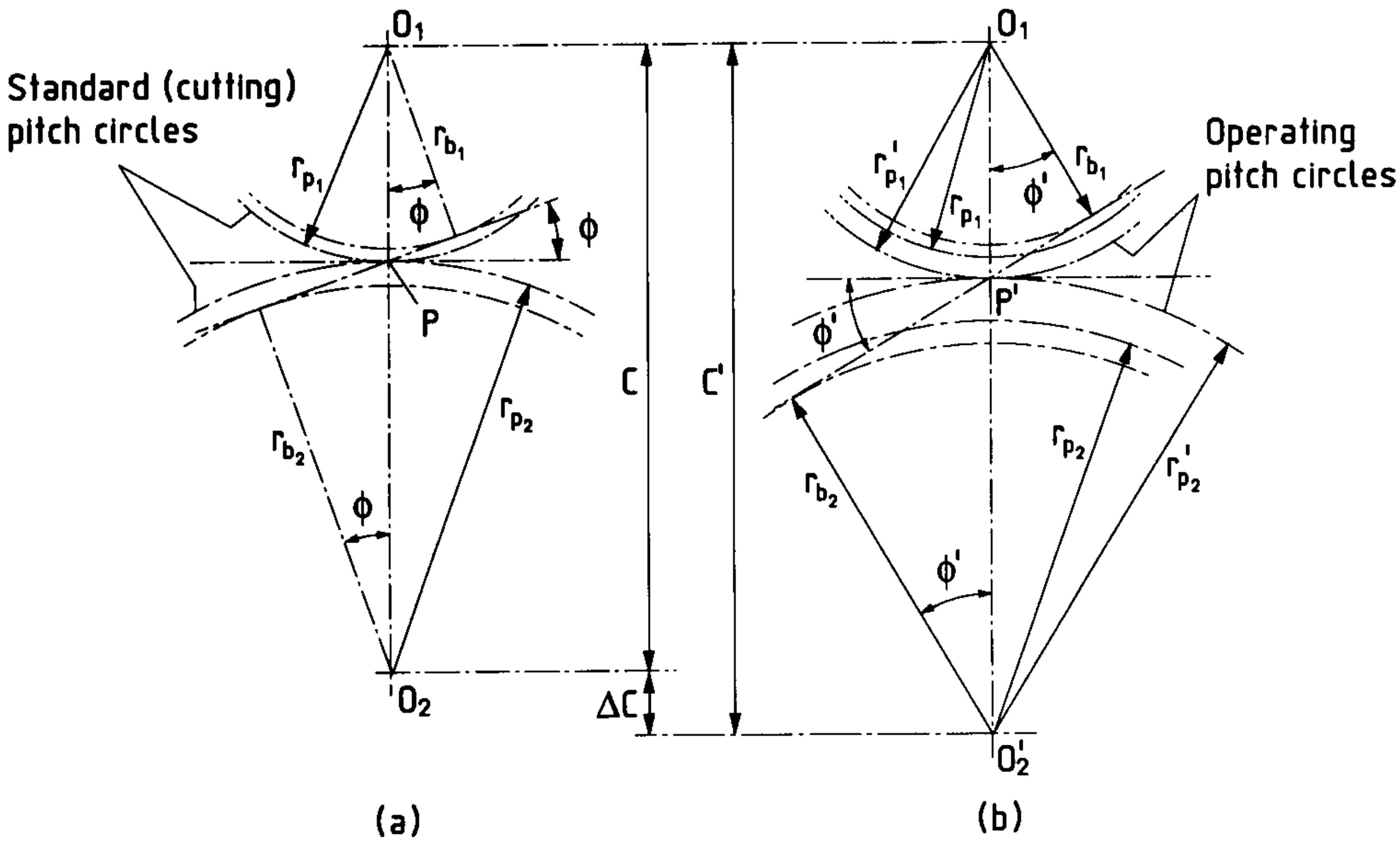


Imagen 2.127. Características.

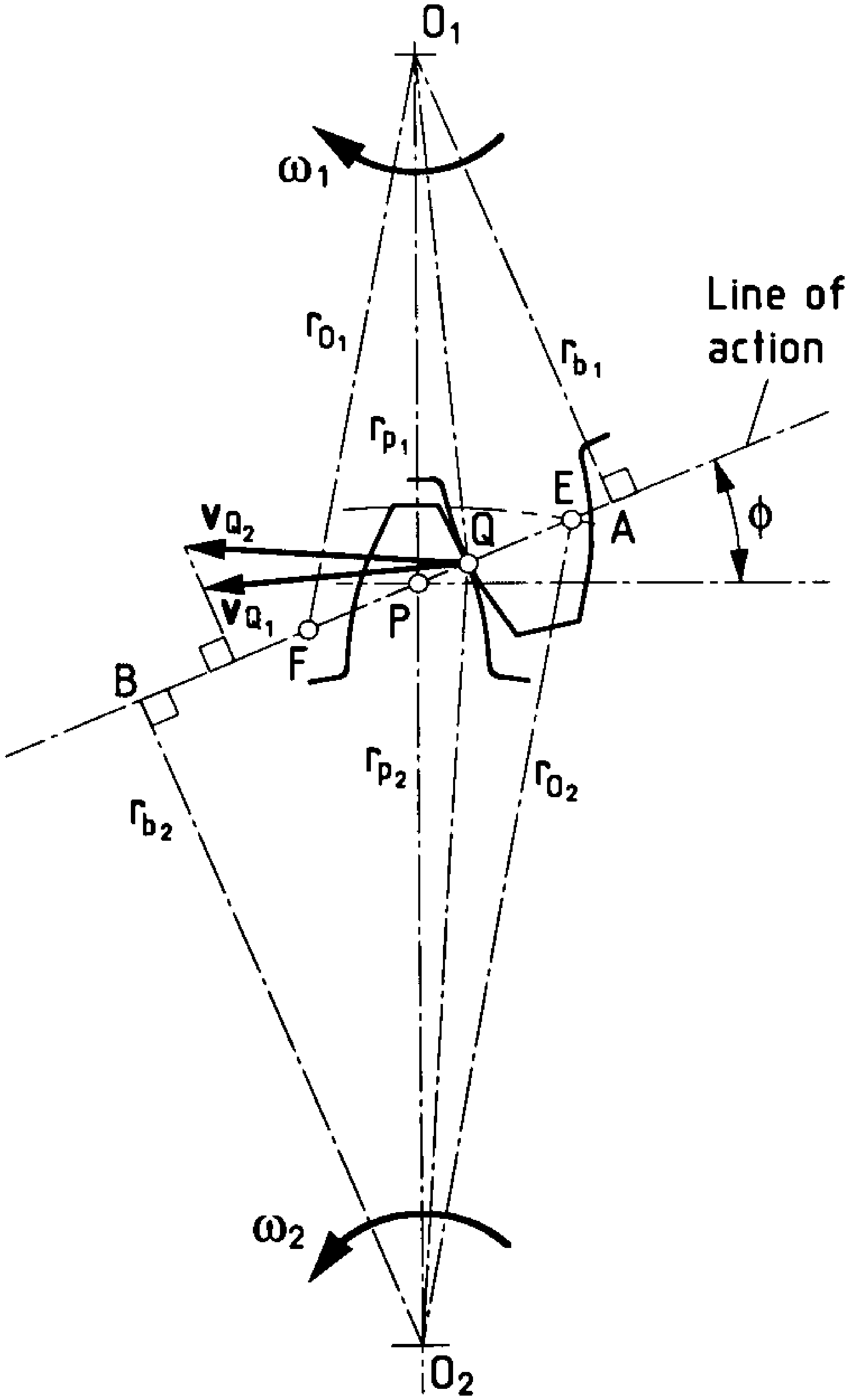


Imagen 2.128. Características.

2.2.4. Tallado de Engranajes Cilíndricos de Dientes Rectos.

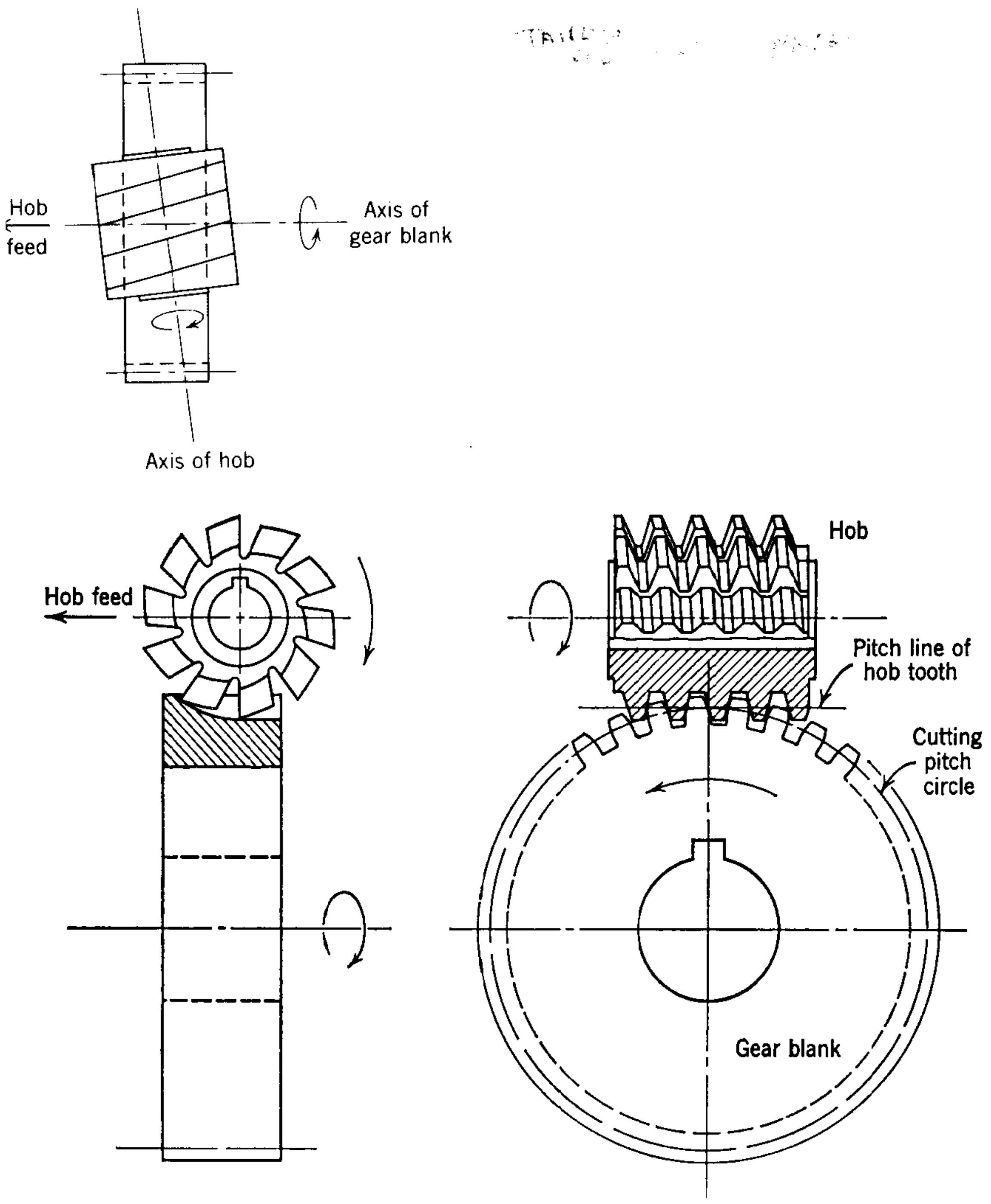


Imagen 2.129. Generación de un engranaje cilíndrico con una fresa

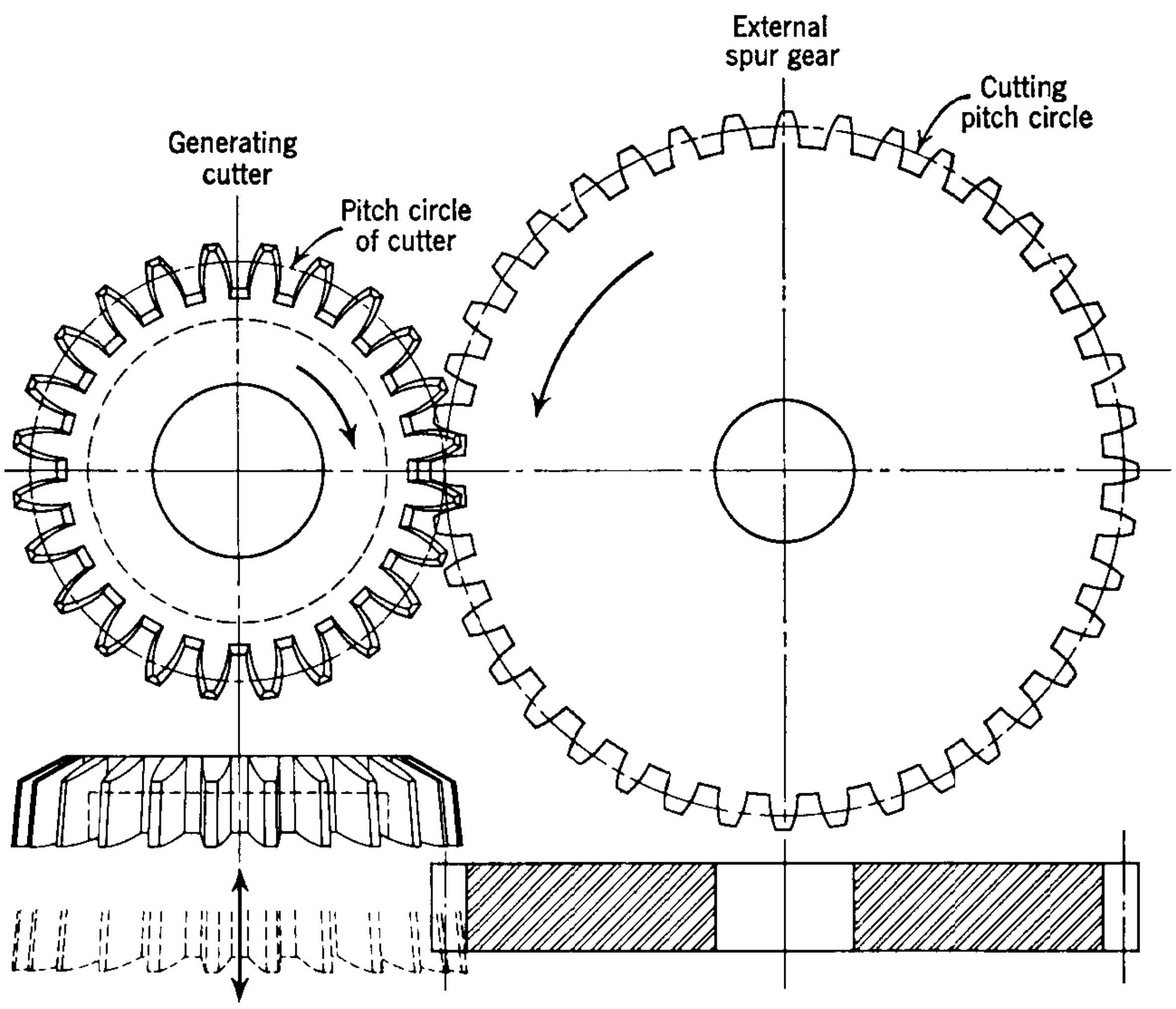


Imagen 2.130. Método de Fellows de generación de engranajes.

2.2.5. Normalización.

El empleo de ruedas completamente intercambiables es probablemente una conveniencia más que una necesidad hoy en día; esto, porque en muchas aplicaciones de los engranajes se acoplan pares de ruedas especialmente terminadas una para la otra. Son los pares de ruedas bruñidas una contra otra a fin de conseguir altas calidades en el engranaje. En tal caso, si se inutiliza una de las ruedas, deben cambiarse ambas.

Definición de paso diametral Pd (Estados Unidos):

$$P_d = \frac{N}{D}$$

$$N = \text{NUMERO DE DIENTES}$$

$$D = \text{DIAMETRO PRIMITIVO, EN in.} \qquad (22)$$

Definición de módulo m (Europa):

$$m = \frac{D}{N}$$

$$D = \text{DIAMETRO PRIMITIVO, EN mm.} \qquad (23)$$

$$N = \text{NUMERO DE DIENTES}$$

$$m = \text{MODULO}$$

Relación entre el módulo y el paso diametral:

$$p = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{P_d}$$

$$p = \frac{\pi D}{N} = \pi m$$

$$p = \text{PASO CIRCULAR}$$

$$P_d = \text{DIAMETRO PRIMITIVO}$$

$$m = \text{MODULO}$$

Las ruedas dentadas para ser intercambiables deben satisfacer las siguientes condiciones: (1) Tener el mismo módulo; (2) Tener el mismo ángulo de presión de generación; (3) Los addendum y dedendum de todas las ruedas han de ser iguales; (4) El espesor circular del diente debe ser el mismo en todas e igual a la mitad del paso circular. Un sistema de dientes es una norma que especifica las relaciones entre addendum, dedendum, profundidad de trabajo, espesor de diente y ángulo de presión para obtener la intercambiabilidad de las ruedas de cualquier número de dientes, siempre que tengan el mismo módulo o el mismo diametral pitch. Debe observarse que las normas no se deben entender como una restricción a la libertad del proyectista, sino todo lo contrario; los dientes de proporciones normales en las ruedas, o sea la obtención de ruedas de serie aseguran la intercambiabilidad y se encuentran con facilidad en el mercado las herramientas o útiles de tallado precisos. Pero evidentemente la necesidad de obtener ruedas de alto poder de transmisión puede aconsejar desviaciones considerables de los sistemas de ruedas normalizadas, o de serie.

I	*II*	*III*
1	1,125	
1,25	1,375	
1,50	1,75	
2	2,25	
2,5	2,75	
3	3,5	(3,25)
4	4,5	(3,75)
5	5,5	
6	7	(6,5)
8	9	
10	11	
12	14	
16	18	
20		

Tabla I. Series de módulos.

La construcción y valores a emplear para los engranajes están normalizados en todos los países. En España, lo ha hecho el Instituto Nacional de Racionalización del Trabajo siguiendo las recomendaciones de la ISO: (1) Están normalizados los módulos de los que existen tres series que se indican en esta tabla, debiendo evitar en los posible el empleo de la serie Ill y dar preferencia a los módulos de la serie I. (2) Está normalizada la cremallera tipo y, en consecuencia, los dientes, con un ángulo de presión de 20º y dientes normal y corto. Las cremalleras correspondientes vienen definidas en la norma UNE 18 016 y las dimensiones de los engranajes en las normas UNE 18 022 si el módulo es igual o mayor que la unidad, y en la UNE 18 028 si el módulo es menor que la unidad. El diente normal tiene: addendum a = 1.00 m, dedendum b = 1.25 m, espacio libre de fondo c = 0.25 m. El diente corto, análogo al denominado Stub, tiene: addendum a = O.75 m, dedendum b = 1.00 m, espacio libre de fondo c = 0.25 m, siendo m el módulo en milímetros. Los dientes, según determina la cremallera base, tienen un radio de acuerdo con el fondo que puede Llegar a valer 0.45 para el módulo unidad. Los dientes al llegar a la circunferencia exterior, van rebajados por un acuerdo de radio mínimo de 13 m que ocupa 0.02 m como máximo de desviación de la recta de la cremallera. El espesor del diente es la mitad del paso.
Las proporciones de los dientes en engranajes cilíndricos de dientes rectos con perfil de evolvente dadas en el Tabla II (Estados Unidos), constituyen el sistema de dientes (norma) normalizado por la American Gear Manufactures Association (AGMA). El valor de 0.002 in. sumado a los dedendum que figuran en la tabla anterior para los diametral pitch finos proporcionan en las ruedas el espacio suplementario para la acumulación inevitable de suciedades en el fondo de los dientes. Esa tabla se refiere a dientes de profundidad completa.

En la Tabla III aparecen los pasos diametrales (diametral pitch) que pueden obtenerse con las fresas normalizadas existentes en el mercado americano. Se pueden encontrar para ángulos de presión 14 1/2º y 20º. Son valores recomendados.

2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18,
20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 50, 64,
72, 80, 96, 120

Tabla III. Pasos diametrales que pueden obtenerse con las fresas normalizadas.

	Coarse Pitch (1–19.99 P_d) AGMA 201.02 August 1974 20° or 25° Full Depth	Fine Pitch (20–200 P_d) AGMA 207.06 November 1977 20° Full Depth
Addendum (a)	$\frac{1.000}{P_d}$	$\frac{1.000}{P_d}$
Dedendum (b)	$\frac{1.250}{P_d}$	$\frac{1.200}{P_d} + 0.002$ (min)
Clearance (c) dedendum − addendum)	$\frac{0.250}{P_d}$	$\frac{0.200}{P_d} + 0.002$ (min)[a]
Working depth (h_k) twice addendum)	$\frac{2.000}{P_d}$	$\frac{2.000}{P_d}$
Whole depth (h_t) addendum + dedendum)	$\frac{2.250}{P_d}$	$\frac{2.200}{P_d} + 0.002$ (min)
Fillet radius of basic rack (r_f)	$\frac{0.300}{P_d}$	Not given
Tooth thickness (t)	$\frac{1.5708}{P_d}$	$\frac{1.5708}{P_d}$

Tabla II. Proporciones de los dientes (AGMA)

En la Tabla IV aparecen los módulos que pueden obtenerse con las fresas normalizadas existentes en el mercado europeo. Todas ellas para un ángulo de presió de 20º.

1, 1.25, 1.50, 1.75, 2, 2.25, 2.50, 2.75, 3, 5, 6, 8,
10, 12, 16, 20

Tabla IV. Módulos que pueden obtenerse con las fresas normalizadas (Europa).

Diametral Pitch	Module Millimeters	Diametral Pitch	Module Millimeters
0.5000	50.8000	11	2.3091
0.7500	33.8667	12	2.1167
1	25.4000	13	1.9538
1.2500	20.3200	14	1.8143
1.5000	16.9333	15	1.6933
1.7500	14.5143	16	1.5875
2	12.7000	17	1.4941
2.2500	11.2889	18	1.4111
2.5000	10.1600	19	1.3368
2.7500	9.2364	20	1.2700
3	8.4667	24	1.0583
3.5000	7.2571	32	0.7938
4	6.3500	40	0.6350
5	5.0800	48	0.5292
6	4.2333	64	0.3969
7	3.6286	72	0.3528
8	3.1750	80	0.3175
9	2.8222	96	0.2646
10	2.5400	120	0.2117

Tabla V.- Equivalencias entre módulos métricos y pasos diametrales.