

## LECCION 3 - EJERCICIO 3 (14.5) v.2018

```
Off[General::"spell1"]  
Off[General::"spell"]
```

### ■ ECUACIONES CONSTITUTIVAS - RELACION TENSIONES-DEFORMACIONES

#### □ TENSIONES

```
s = {sxx, syy, sxy};
```

```
s // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{pmatrix}$$

#### □ DEFORMACIONES

```
gxy = 2*exy; syx = sxy; eyx = exy
```

```
e = {exx, eyy, gxy};
```

```
Dimensions[e]
```

```
{3}
```

```
e // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ g_{xy} \end{pmatrix}$$

#### □ MATRIZ Em

$$\mathbf{E}_m = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{pmatrix};$$

#### □ RELACION TENSIONES - DEFORMACIONES

```
s = Em.e;
```

```
s // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} E_{11} e_{xx} + E_{12} e_{yy} + E_{13} g_{xy} \\ E_{12} e_{xx} + E_{22} e_{yy} + E_{23} g_{xy} \\ E_{13} e_{xx} + E_{23} e_{yy} + E_{33} g_{xy} \end{pmatrix}$$

```
Rs = {sxx -> s[[1]], syy -> s[[2]], sxy -> s[[3]]};
```

#### □ RELACION DEFORMACIONES - TENSIONES

```
s = {sxx, syy, sxy};
```

```
e = Simplify[Inverse[Em].s];
```

```
e // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{E23^2 sxx - E22 E33 sxx + E13 E22 sxy + E12 E33 syy - E23 (E12 sxy + E13 syy)}{E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 (E23^2 - E22 E33)} \\ \frac{E12 E33 sxx + E11 E23 sxy - E13 (E23 sxx + E12 sxy) + E13^2 syy - E11 E33 syy}{E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 (E23^2 - E22 E33)} \\ \frac{E13 E22 sxx - E12 E23 sxx + E12^2 sxy - E11 E22 sxy - E12 E13 syy + E11 E23 syy}{E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E11 E23^2 + E12^2 E33 - E11 E22 E33} \end{pmatrix}$$

```
Ree = {exx -> e[[1]], eyy -> e[[2]], gxy -> e[[3]]};
```

## ■ DENSIDAD DE ENERGIA DE DEFORMACION

### □ DEFINICION

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} * (sxx * exx + syy * eyy + sxy * exy + syx * eyx)$$

$$\frac{1}{2} (exx sxx + exy sxy + eyx syx + eyy syy)$$

```
u = u /. {syx -> sxy, eyx -> exy}
```

$$\frac{1}{2} (exx sxx + 2 exy sxy + eyy syy)$$

### □ SOLO EN DEFORMACIONES

```
ud1 = u /. Rs /. {gxy -> 2 * exy}
```

$$\frac{1}{2} (exx (E11 exx + 2 E13 exy + E12 eyy) + eyy (E12 exx + 2 E23 exy + E22 eyy) + 2 exy (E13 exx + 2 E33 exy + E23 eyy))$$

```
e = {exx, eyy, gxy};
```

```
Em
```

```
{{E11, E12, E13}, {E12, E22, E23}, {E13, E23, E33}}
```

SEGUN ENUNCIADO

$$\mathcal{Ud2} = \frac{1}{2} * e \cdot Em \cdot e$$

$$\frac{1}{2} (exx (E11 exx + E12 eyy + E13 gxy) + eyy (E12 exx + E22 eyy + E23 gxy) + gxy (E13 exx + E23 eyy + E33 gxy))$$

```
ud2 = Ud2 /. {gxy -> 2 * exy}
```

$$\frac{1}{2} (exx (E11 exx + 2 E13 exy + E12 eyy) + eyy (E12 exx + 2 E23 exy + E22 eyy) + 2 exy (E13 exx + 2 E33 exy + E23 eyy))$$

$u_{d1}$ 

$$\frac{1}{2} (\text{exx} (E11 \text{ exx} + 2 E13 \text{ exy} + E12 \text{ eyy}) + \text{eyy} (E12 \text{ exx} + 2 E23 \text{ exy} + E22 \text{ eyy}) + 2 \text{ exy} (E13 \text{ exx} + 2 E33 \text{ exy} + E23 \text{ eyy}))$$

COMPROBACION

 $u_{d1} == u_{d2}$ 

True

Simplify[%]

True

### ▣ SOLO EN TENSIONES

 $u_{t1} = u /. \{2 * \text{exy} \rightarrow \text{gxy}\} /. \text{Ree}$ 

$$\frac{1}{2} \left( \left( \text{sxy} (E13 E22 \text{ sxx} - E12 E23 \text{ sxx} + E12^2 \text{ sxy} - E11 E22 \text{ sxy} - E12 E13 \text{ syy} + E11 E23 \text{ syy}) \right) / \right. \\ \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E11 E23^2 + E12^2 E33 - E11 E22 E33 \right) + \\ \left( \text{syx} (E12 E33 \text{ sxx} + E11 E23 \text{ sxy} - E13 (E23 \text{ sxx} + E12 \text{ sxy}) + E13^2 \text{ syy} - E11 E33 \text{ syy}) \right) / \\ \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 (E23^2 - E22 E33) \right) + \\ \left. \left( \text{sxx} (E23^2 \text{ sxx} - E22 E33 \text{ sxx} + E13 E22 \text{ sxy} + E12 E33 \text{ syy} - E23 (E12 \text{ sxy} + E13 \text{ syy})) \right) / \right. \\ \left. \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 (E23^2 - E22 E33) \right) \right)$$

 $s = \{\text{sxx}, \text{syx}, \text{sxy}\};$ 

SEGUN ENUNCIADO

 $u_{t2} = \text{Simplify} \left[ \frac{1}{2} * s.\text{Inverse}[Em] . s \right]$ 

$$\left( E23^2 \text{ sxx}^2 + E12^2 \text{ sxy}^2 - E22 (E33 \text{ sxx}^2 - 2 E13 \text{ sxx} \text{ sxy} + E11 \text{ sxy}^2) + 2 E12 E33 \text{ sxx} \text{ syx} - \right. \\ \left. 2 E12 E13 \text{ sxy} \text{ syx} + E13^2 \text{ syx}^2 - E11 E33 \text{ syx}^2 - 2 E23 (E12 \text{ sxx} \text{ sxy} + E13 \text{ sxx} \text{ syx} - E11 \text{ sxy} \text{ syx}) \right) / \\ \left( 2 (E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 (E23^2 - E22 E33)) \right)$$

 $u_{t1}$ 

$$\frac{1}{2} \left( \left( \text{sxy} (E13 E22 \text{ sxx} - E12 E23 \text{ sxx} + E12^2 \text{ sxy} - E11 E22 \text{ sxy} - E12 E13 \text{ syy} + E11 E23 \text{ syy}) \right) / \right. \\ \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E11 E23^2 + E12^2 E33 - E11 E22 E33 \right) + \\ \left( \text{syx} (E12 E33 \text{ sxx} + E11 E23 \text{ sxy} - E13 (E23 \text{ sxx} + E12 \text{ sxy}) + E13^2 \text{ syy} - E11 E33 \text{ syy}) \right) / \\ \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 (E23^2 - E22 E33) \right) + \\ \left. \left( \text{sxx} (E23^2 \text{ sxx} - E22 E33 \text{ sxx} + E13 E22 \text{ sxy} + E12 E33 \text{ syy} - E23 (E12 \text{ sxy} + E13 \text{ syy})) \right) / \right. \\ \left. \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 (E23^2 - E22 E33) \right) \right)$$

COMPROBACION

```
ut1 == ut2
```

$$\frac{1}{2} \left( \left( sxy \left( E13 E22 sxx - E12 E23 sxx + E12^2 sxy - E11 E22 sxy - E12 E13 syy + E11 E23 syy \right) \right) / \right. \\ \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E11 E23^2 + E12^2 E33 - E11 E22 E33 \right) + \\ \left( syy \left( E12 E33 sxx + E11 E23 sxy - E13 \left( E23 sxx + E12 sxy \right) + E13^2 syy - E11 E33 syy \right) \right) / \\ \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 \left( E23^2 - E22 E33 \right) \right) + \\ \left( sxx \left( E23^2 sxx - E22 E33 sxx + E13 E22 sxy + E12 E33 syy - E23 \left( E12 sxy + E13 syy \right) \right) \right) / \\ \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 \left( E23^2 - E22 E33 \right) \right) \right) = \\ \left( E23^2 sxx^2 + E12^2 sxy^2 - E22 \left( E33 sxx^2 - 2 E13 sxx sxy + E11 sxy^2 \right) + 2 E12 E33 sxx syy - 2 E12 E13 sxy syy + \right. \\ \left. E13^2 syy^2 - E11 E33 syy^2 - 2 E23 \left( E12 sxx sxy + E13 sxx syy - E11 sxy syy \right) \right) / \\ \left( 2 \left( E13^2 E22 - 2 E12 E13 E23 + E12^2 E33 + E11 \left( E23^2 - E22 E33 \right) \right) \right)$$

```
Simplify[%]
```

```
True
```

## □ EN TENSIONES Y DEFORMACIONES

VECTOR  $m$  - TERMINOS A UTILIZAR

```
m = {exx, eyy, sxy};
```

RELACION TENSIONES-DEFORMACION

```
s = Em.e;
```

```
s // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} E11 \text{exx} + E12 \text{eyy} + E13 \text{gxy} \\ E12 \text{exx} + E22 \text{eyy} + E23 \text{gxy} \\ E13 \text{exx} + E23 \text{eyy} + E33 \text{gxy} \end{pmatrix}$$

ECUACIONES A RESOLVER

```
Ecuaciones = {sxx == s[[1]], syy == s[[2]], sxy == s[[3]]}
```

```
{sxx == E11 exx + E12 eyy + E13 gxy, syy == E12 exx + E22 eyy + E23 gxy, sxy == E13 exx + E23 eyy + E33 gxy}
```

RESOLVEMOS PARA EL RESTO DE TERMINOS

```
Solucion = Solve[Ecuaciones, {sxx, syy, gxy}]
```

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} sxx &\rightarrow E11 \text{exx} + E12 \text{eyy} - \frac{E13 (E13 \text{exx} + E23 \text{eyy} - sxy)}{E33}, \\ syy &\rightarrow E12 \text{exx} + E22 \text{eyy} - \frac{E23 (E13 \text{exx} + E23 \text{eyy} - sxy)}{E33}, \\ gxy &\rightarrow -\frac{E13 \text{exx} + E23 \text{eyy} - sxy}{E33} \end{aligned} \right\} \right\}$$

DENSIDAD ENERGIA DE DEFORMACION

$$U_{m1} = U /. \{2 * exy \rightarrow gxy\} /. \text{Solucion}[[1]]$$

$$\frac{1}{2} \left( exx \left( E11 exx + E12 eyy - \frac{E13 (E13 exx + E23 eyy - sxy)}{E33} \right) + eyy \left( E12 exx + E22 eyy - \frac{E23 (E13 exx + E23 eyy - sxy)}{E33} \right) - \frac{(E13 exx + E23 eyy - sxy) sxy}{E33} \right)$$

$$U_{m1} = \text{Expand}[U_{m1}]$$

$$\frac{E11 exx^2}{2} - \frac{E13^2 exx^2}{2 E33} + E12 exx eyy - \frac{E13 E23 exx eyy}{E33} + \frac{E22 eyy^2}{2} - \frac{E23^2 eyy^2}{2 E33} + \frac{sxy^2}{2 E33}$$

$$\text{Expand}[U_{m1}]$$

$$\frac{E11 exx^2}{2} - \frac{E13^2 exx^2}{2 E33} + E12 exx eyy - \frac{E13 E23 exx eyy}{E33} + \frac{E22 eyy^2}{2} - \frac{E23^2 eyy^2}{2 E33} + \frac{sxy^2}{2 E33}$$

DENSIDAD ENERGIA DE DEFORMACION - EN ENUNCIADO

$$A = \begin{pmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A12 & A22 & A23 \\ A13 & A23 & A33 \end{pmatrix};$$

$$U_{m2} = \frac{1}{2} * m.A.m$$

$$\frac{1}{2} (exx (A11 exx + A12 eyy + A13 sxy) + eyy (A12 exx + A22 eyy + A23 sxy) + sxy (A13 exx + A23 eyy + A33 sxy))$$

$$U_{m2} = \text{Expand}[U_{m2}]$$

$$\frac{A11 exx^2}{2} + A12 exx eyy + \frac{A22 eyy^2}{2} + A13 exx sxy + A23 eyy sxy + \frac{A33 sxy^2}{2}$$

$$\text{Factor}[U_{m2}]$$

$$\frac{1}{2} (A11 exx^2 + 2 A12 exx eyy + A22 eyy^2 + 2 A13 exx sxy + 2 A23 eyy sxy + A33 sxy^2)$$

PROCESO DE PLANTEAMIENTO ECUACIONES A RESOLVER - SON 9

$$U_{m1m} = U_{m1} /. \{exx^2 \rightarrow exx2, eyy^2 \rightarrow eyy2, exx eyy \rightarrow exxyy, exx sxy \rightarrow exsxy, eyy sxy \rightarrow eysxy, sxy^2 \rightarrow sxy2\}$$

$$\frac{E11 exx2}{2} - \frac{E13^2 exx2}{2 E33} + E12 exxyy - \frac{E13 E23 exxyy}{E33} + \frac{E22 eyy2}{2} - \frac{E23^2 eyy2}{2 E33} + \frac{sxy2}{2 E33}$$

$$U_{m2m} = U_{m2} /. \{exx^2 \rightarrow exx2, eyy^2 \rightarrow eyy2, exx eyy \rightarrow exxyy, exx sxy \rightarrow exsxy, eyy sxy \rightarrow eysxy, sxy^2 \rightarrow sxy2\}$$

$$A13 exsxy + \frac{A11 exx2}{2} + A12 exxyy + A23 eysxy + \frac{A22 eyy2}{2} + \frac{A33 sxy2}{2}$$

$$\text{EcuacionesM} = \{ \partial_{\text{exx}2} \mathcal{U}m1m == \partial_{\text{exx}2} \mathcal{U}m2m, \partial_{\text{eyy}2} \mathcal{U}m1m == \partial_{\text{eyy}2} \mathcal{U}m2m, \partial_{\text{exxy}} \mathcal{U}m1m == \partial_{\text{exxy}} \mathcal{U}m2m, \\ \partial_{\text{exsxy}} \mathcal{U}m1m == \partial_{\text{exsxy}} \mathcal{U}m2m, \partial_{\text{eysxy}} \mathcal{U}m1m == \partial_{\text{eysxy}} \mathcal{U}m2m, \partial_{\text{sxy}2} \mathcal{U}m1m == \partial_{\text{sxy}2} \mathcal{U}m2m \}$$

$$\left\{ \frac{E11}{2} - \frac{E13^2}{2 E33} == \frac{A11}{2}, \frac{E22}{2} - \frac{E23^2}{2 E33} == \frac{A22}{2}, E12 - \frac{E13 E23}{E33} == A12, 0 == A13, 0 == A23, \frac{1}{2 E33} == \frac{A33}{2} \right\}$$

SOLUCION DE ECUACIONES

$$\text{SolucionM} = \text{Solve}[\text{EcuacionesM}, \{A11, A22, A33, A12, A13, A23\}]$$

$$\left\{ \left\{ A11 \rightarrow \frac{-E13^2 + E11 E33}{E33}, A22 \rightarrow \frac{-E23^2 + E22 E33}{E33}, A33 \rightarrow \frac{1}{E33}, A12 \rightarrow \frac{-E13 E23 + E12 E33}{E33}, A13 \rightarrow 0, A23 \rightarrow 0 \right\} \right\}$$

SOLUCION MATRIZ A

$$\text{As} = \text{A} /. \text{SolucionM}[[1]]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{-E13^2 + E11 E33}{2 E33}, \frac{-2 E13 E23 + 2 E12 E33}{4 E33}, 0 \right\}, \left\{ \frac{-2 E13 E23 + 2 E12 E33}{4 E33}, \frac{-E23^2 + E22 E33}{2 E33}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{1}{2 E33} \right\} \right\}$$

As // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{-E13^2 + E11 E33}{2 E33} & \frac{-2 E13 E23 + 2 E12 E33}{4 E33} & 0 \\ \frac{-2 E13 E23 + 2 E12 E33}{4 E33} & \frac{-E23^2 + E22 E33}{2 E33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2 E33} \end{pmatrix}$$

OK